义 务 教　　育

数学课程标准

（2011 年版）

中华人民共和国教育部制定

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

目　　录

第一部分　前言 …… (1)
一、课程性质 …… (1)
二、课程基本理念 …… (2)
三、课程设计思路 …… (3)
第二部分　课程目标 …… (8)
一、总目标 …… (8)
二、学段目标 …… (10)
第三部分　课程内容 …… (16)
第一学段(1~3年级) …… (16)
一、数与代数 …… (16)
二、图形与几何 …… (18)
三、统计与概率 …… (19)
四、综合与实践 …… (20)
第二学段(4~6年级) …… (20)
一、数与代数 …… (20)
二、图形与几何 …… (23)
三、统计与概率 …… (25)
四、综合与实践 …… (26)

第三学段(7～9年级) …… (26)
一、数与代数 …… (26)
二、图形与几何 …… (31)
三、统计与概率 …… (39)
四、综合与实践 …… (41)

第四部分　实施建议 …… (42)
一、教学建议 …… (42)
二、评价建议 …… (52)
三、教材编写建议 …… (59)
四、课程资源开发与利用建议 …… (67)

附录 …… (72)
附录1　有关行为动词的分类 …… (72)
附录2　课程内容及实施建议中的实例 …… (74)

第一部分　前言

数学是研究数量关系和空间形式的科学。数学与人类发展和社会进步息息相关，随着现代信息技术的飞速发展，数学更加广泛应用于社会生产和日常生活的各个方面。数学作为对于客观现象抽象概括而逐渐形成的科学语言与工具，不仅是自然科学和技术科学的基础，而且在人文科学与社会科学中发挥着越来越大的作用。特别是20世纪中叶以来，数学与计算机技术的结合在许多方面直接为社会创造价值，推动着社会生产力的发展。

数学是人类文化的重要组成部分，数学素养是现代社会每一个公民应该具备的基本素养。作为促进学生全面发展教育的重要组成部分，数学教育既要使学生掌握现代生活和学习中所需要的数学知识与技能，更要发挥数学在培养人的思维能力和创新能力方面的不可替代的作用。

一、课程性质

义务教育阶段的数学课程是培养公民素质的基础课程，具有基础性、普及性和发展性。数学课程能使学生掌握必备的基础知识和基本技能，培养学生的抽象思维和推理能力，培养学生的创新意识和实践能力，促进学生在情感、

态度与价值观等方面的发展。义务教育的数学课程能为学生未来生活、工作和学习奠定重要的基础。

二、课程基本理念

1. 数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。

2. 课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。它不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法。课程内容的选择要贴近学生的实际，有利于学生体验与理解、思考与探索。课程内容的组织要重视过程，处理好过程与结果的关系；要重视直观，处理好直观与抽象的关系；要重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。课程内容的呈现应注意层次性和多样性。

3. 教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

数学教学活动，特别是课堂教学应激发学生兴趣，调动学生积极性，引发学生的数学思考，鼓励学生的创造性思维；要注重培养学生良好的数学学习习惯，使学生掌握恰当的数学学习方法。

学生学习应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。认真听讲、积极思考、动手实践、自主探索、合作交流等，都是学习数学的重要方式。学生应当有足够的

时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程。

教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会和运用数学思想与方法，获得基本的数学活动经验。

4. 学习评价的主要目的是为了全面了解学生数学学习的过程和结果，激励学生学习和改进教师教学。应建立目标多元、方法多样的评价体系。评价既要关注学生学习的结果，也要重视学习的过程；既要关注学生数学学习的水平，也要重视学生在数学活动中所表现出来的情感与态度，帮助学生认识自我、建立信心。

5. 信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容以及教学方式产生了很大的影响。数学课程的设计与实施应根据实际情况合理地运用现代信息技术，要注意信息技术与课程内容的整合，注重实效。要充分考虑信息技术对数学学习内容和方式的影响，开发并向学生提供丰富的学习资源，把现代信息技术作为学生学习数学和解决问题的有力工具，有效地改进教与学的方式，使学生乐意并有可能投入到现实的、探索性的数学活动中去。

三、课程设计思路

义务教育阶段数学课程的设计，充分考虑本阶段学生数学学习的特点，符合学生的认知规律和心理特征，有利

于激发学生的学习兴趣，引发学生的数学思考；充分考虑数学本身的特点，体现数学的实质；在呈现作为知识与技能的数学结果的同时，重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题的过程。

按以上思路具体设计如下。

（一）学段划分

为了体现义务教育数学课程的整体性，本标准统筹考虑九年的课程内容。同时，根据学生发展的生理和心理特征，将九年的学习时间划分为三个学段：第一学段（1～3年级）、第二学段（4～6年级）、第三学段（7～9年级）。

（二）课程目标

义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标，从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个方面加以阐述。

数学课程目标包括结果目标和过程目标。结果目标使用“了解”“理解”“掌握”“运用”等行为动词表述，过程目标使用“经历”“体验”“探索”等行为动词表述（行为动词解释见附录1）。

（三）课程内容

在各学段中，安排了四个部分的课程内容：“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”。其中，“综合与实践”内容设置的目的在于培养学生综合运用有关的知识与方法解决实际问题，培养学生的问题意识、应用意识和

创新意识，积累学生的活动经验，提高学生解决现实问题的能力。

“数与代数”的主要内容有：数的认识，数的表示，数的大小，数的运算，数量的估计；字母表示数，代数式及其运算；方程、方程组、不等式、函数等。

“图形与几何”的主要内容有：空间和平面基本图形的认识，图形的性质、分类和度量；图形的平移、旋转、轴对称、相似和投影；平面图形基本性质的证明；运用坐标描述图形的位置和运动。

“统计与概率”的主要内容有：收集、整理和描述数据，包括简单抽样、整理调查数据、绘制统计图表等；处理数据，包括计算平均数、中位数、众数、方差等；从数据中提取信息并进行简单的推断；简单随机事件及其发生的概率。

“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。在学习活动中，学生将综合运用“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”等知识和方法解决问题。“综合与实践”的教学活动应当保证每学期至少一次，可以在课堂上完成，也可以课内外相结合。提倡把这种教学形式体现在日常教学活动中。

在数学课程中，应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的应用意识和创新意识。

数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。

符号意识主要是指能够理解并且运用符号表示数、数量关系和变化规律；知道使用符号可以进行运算和推理，得到的结论具有一般性。建立符号意识有助于学生理解符号的使用是数学表达和进行数学思考的重要形式。

空间观念主要是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等。

几何直观主要是指利用图形描述和分析问题。借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果。几何直观可以帮助学生直观地理解数学，在整个数学学习过程中都发挥着重要作用。

数据分析观念包括：了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析作出判断，体会数据中蕴涵着信息；了解对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的背景选择合适的方法；通过数据分析体验随机性，一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同，另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律。数据分析是统计的核心。

运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题。

推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程中。推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。推理一般包括合情推理和演绎推理，合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果；演绎推理是从已有的事实（包括定义、

公理、定理等)和确定的规则(包括运算的定义、法则、顺序等)出发，按照逻辑推理的法则证明和计算。在解决问题的过程中，两种推理功能不同，相辅相成：合情推理用于探索思路，发现结论；演绎推理用于证明结论。

模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果并讨论结果的意义。这些内容的学习有助于学生初步形成模型思想，提高学习数学的兴趣和应用意识。

应用意识有两个方面的含义：一方面，有意识利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象，解决现实世界中的问题；另一方面，认识到现实生活中蕴涵着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题，用数学的方法予以解决。在整个数学教育的过程中都应该培养学生的应用意识，综合实践活动是培养应用意识很好的载体。

创新意识的培养是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中。学生自己发现和提出问题是创新的基础；独立思考、学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，是创新的重要方法。创新意识的培养应该从义务教育阶段做起，贯穿数学教育的始终。

第二部分　课程目标

一、总目标

通过义务教育阶段的数学学习，学生能：

1. 获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。

2. 体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。

3. 了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。

总目标从以下四个方面具体阐述：

知识技能	• 经历数与代数的抽象、运算与建模等过程，掌握数与代数的基础知识和基本技能。 • 经历图形的抽象、分类、性质探讨、运动、位置确定等过程，掌握图形与几何的基础知识和基本技能。 • 经历在实际问题中收集和处理数据、利用数据分析问题、获取信息的过程，掌握统计与概率的基础知识和基本技能。 • 参与综合实践活动，积累综合运用数学知识、技能和方法等解决简单问题的数学活动经验。

续表

数学思考	• 建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维。 • 体会统计方法的意义，发展数据分析观念，感受随机现象。 • 在参与观察、实验、猜想、证明、综合实践等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力，清晰地表达自己的想法。 • 学会独立思考，体会数学的基本思想和思维方式。
问题解决	• 初步学会从数学的角度发现问题和提出问题，综合运用数学知识解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力。 • 获得分析问题和解决问题的一些基本方法，体验解决问题方法的多样性，发展创新意识。 • 学会与他人合作交流。 • 初步形成评价与反思的意识。
情感态度	• 积极参与数学活动，对数学有好奇心和求知欲。 • 在数学学习过程中，体验获得成功的乐趣，锻炼克服困难的意志，建立自信心。 • 体会数学的特点，了解数学的价值。 • 养成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等学习习惯。 • 形成坚持真理、修正错误、严谨求实的科学态度。

总目标的这四个方面，不是相互独立和割裂的，而是一个密切联系、相互交融的有机整体。在课程设计和教学活动组织中，应同时兼顾这四个方面的目标。这些目标的整体实现，是学生受到良好数学教育的标志，它对学生的全面、持续、和谐发展有着重要的意义。数学思考、问题

解决、情感态度的发展离不开知识技能的学习，知识技能的学习必须有利于其他三个目标的实现。

二、学段目标

第一学段(1～3年级)

知识技能

1. 经历从日常生活中抽象出数的过程，理解万以内数的意义，初步认识分数和小数；理解常见的量；体会四则运算的意义，掌握必要的运算技能，能准确进行运算；在具体情境中，能选择适当的单位进行简单的估算。

2. 经历从实际物体中抽象出简单几何体和平面图形的过程，了解一些简单几何体和常见的平面图形；感受平移、旋转、轴对称现象；认识物体的相对位置；掌握初步的测量、识图和画图的技能。

3. 经历简单的数据收集、整理和分析的过程，了解简单的数据处理方法。

数学思考

1. 在运用数及适当的度量单位描述现实生活中的简单现象，以及对运算结果进行估计的过程中，发展数感；在从物体中抽象出几何图形、想象图形的运动和位置的过程中，发展空间观念。

2. 能对调查过程中获得的简单数据进行归类，体验数据中蕴涵着信息。

3. 在观察、操作等活动中，能提出一些简单的猜想。

4. 会独立思考问题，表达自己的想法。

问题解决

1. 能在教师的指导下，从日常生活中发现和提出简单的数学问题，并尝试解决。

2. 了解分析问题和解决问题的一些基本方法，知道同一个问题可以有不同的解决方法。

3. 体验与他人合作交流解决问题的过程。

4. 尝试回顾解决问题的过程。

情感态度

1. 对身边与数学有关的事物有好奇心，能参与数学活动。

2. 在他人帮助下，感受数学活动中的成功，能尝试克服困难。

3. 了解数学可以描述生活中的一些现象，感受数学与生活有密切联系。

4. 能倾听别人的意见，尝试对别人的想法提出建议，知道应该尊重客观事实。

第二学段(4～6 年级)

知识技能

1. 体验从具体情境中抽象出数的过程，认识万以上的数；理解分数、小数、百分数的意义，了解负数的意义；掌握必要的运算技能；理解估算的意义；能用方程表示简

单的数量关系，能解简单的方程。

2. 探索一些图形的形状、大小和位置关系，了解一些几何体和平面图形的基本特征；体验简单图形的运动过程，能在方格纸上画出简单图形运动后的图形，了解确定物体位置的一些基本方法；掌握测量、识图和画图的基本方法。

3. 经历数据的收集、整理和分析的过程，掌握一些简单的数据处理技能；体验随机事件和事件发生的等可能性。

4. 能借助计算器解决简单的应用问题。

数学思考

1. 初步形成数感和空间观念，感受符号和几何直观的作用。

2. 进一步认识到数据中蕴涵着信息，发展数据分析观念；通过实例感受简单的随机现象。

3. 在观察、实验、猜想、验证等活动中，发展合情推理能力，能进行有条理的思考，能比较清楚地表达自己的思考过程与结果。

4. 会独立思考，体会一些数学的基本思想。

问题解决

1. 尝试从日常生活中发现并提出简单的数学问题，并运用一些知识加以解决。

2. 能探索分析和解决简单问题的有效方法，了解解决问题方法的多样性。

3. 经历与他人合作交流解决问题的过程，尝试解释自己的思考过程。

4. 能回顾解决问题的过程，初步判断结果的合理性。

情感态度

1. 愿意了解社会生活中与数学相关的信息，主动参与数学学习活动。

2. 在他人的鼓励和引导下，体验克服困难、解决问题的过程，相信自己能够学好数学。

3. 在运用数学知识和方法解决问题的过程中，认识数学的价值。

4. 初步养成乐于思考、勇于质疑、言必有据等良好品质。

第三学段(7～9 年级)

知识技能

1. 体验从具体情境中抽象出数学符号的过程，理解有理数、实数、代数式、方程、不等式、函数；掌握必要的运算(包括估算)技能；探索具体问题中的数量关系和变化规律，掌握用代数式、方程、不等式、函数进行表述的方法。

2. 探索并掌握相交线、平行线、三角形、四边形和圆的基本性质与判定，掌握基本的证明方法和基本的作图技能；探索并理解平面图形的平移、旋转、轴对称；认识投影与视图；探索并理解平面直角坐标系及其应用。

3. 体验数据收集、处理、分析和推断过程，理解抽样方法，体验用样本估计总体的过程；进一步认识随机现象，能计算一些简单事件的概率。

数学思考

1. 通过用代数式、方程、不等式、函数等表述数量关系的过程，体会模型的思想，建立符号意识；在研究图形性质和运动、确定物体位置等过程中，进一步发展空间观念；经历借助图形思考问题的过程，初步建立几何直观。

2. 了解利用数据可以进行统计推断，发展建立数据分析观念；感受随机现象的特点。

3. 体会通过合情推理探索数学结论，运用演绎推理加以证明的过程，在多种形式的数学活动中，发展合情推理与演绎推理的能力。

4. 能独立思考，体会数学的基本思想和思维方式。

问题解决

1. 初步学会在具体的情境中从数学的角度发现问题和提出问题，并综合运用数学知识和方法等解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力。

2. 经历从不同角度寻求分析问题和解决问题的方法的过程，体验解决问题方法的多样性，掌握分析问题和解决问题的一些基本方法。

3. 在与他人合作和交流过程中，能较好地理解他人的思考方法和结论。

4. 能针对他人所提的问题进行反思，初步形成评价与反思的意识。

情感态度

1. 积极参与数学活动，对数学有好奇心和求知欲。

2. 感受成功的快乐，体验独自克服困难、解决数学问题的过程，有克服困难的勇气，具备学好数学的信心。

3. 在运用数学表述和解决问题的过程中，认识数学具有抽象、严谨和应用广泛的特点，体会数学的价值。

4. 敢于发表自己的想法、勇于质疑、敢于创新，养成认真勤奋、独立思考、合作交流等学习习惯，形成严谨求实的科学态度。

第三部分　课程内容

第一学段(1～3年级)

一、数与代数

(一)数的认识

1. 在现实情境中理解万以内数的意义，能认、读、写万以内的数，能用数表示物体的个数或事物的顺序和位置。

2. 能说出各数位的名称，理解各数位上的数字表示的意义；知道用算盘可以表示多位数(参见例1)。

3. 理解符号<，=，>的含义，能用符号和词语描述万以内数的大小(参见例2)。

4. 在生活情境中感受大数的意义，并能进行估计(参见例3)。

5. 能结合具体情境初步认识小数和分数，能读、写小数和分数。

6. 能结合具体情境比较两个一位小数的大小，能比较两个同分母分数的大小。

7. 能运用数表示日常生活中的一些事物，并能进行交流(参见例4)。

(二)数的运算

1. 结合具体情境，体会整数四则运算的意义(参见例5)。

2. 能熟练地口算20以内的加减法和表内乘除法，能口算简单的百以内的加减法和一位数乘除两位数。

3. 能计算两位数和三位数的加减法，一位数乘两位数和三位数、两位数乘两位数的乘法，两位数和三位数除以一位数的除法。

4. 认识小括号，能进行简单的整数四则混合运算(两步)。

5. 会进行同分母分数(分母小于10)的加减运算以及一位小数的加减运算。

6. 能结合具体情境，选择适当的单位进行简单估算，体会估算在生活中的作用(参见例6)。

7. 经历与他人交流各自算法的过程。

8. 能运用数及数的运算解决生活中的简单问题，并能对结果的实际意义作出解释(参见例7)。

(三)常见的量

1. 在现实情境中，认识元、角、分，并了解它们之间的关系。

2. 能认识钟表，了解24时记时法；结合自己的生活经验，体验时间的长短(参见例8)。

3. 认识年、月、日，了解它们之间的关系。

4. 在现实情境中，感受并认识克、千克、吨，能进行简单的单位换算。

5. 能结合生活实际，解决与常见的量有关的简单问题。

(四)探索规律

探索简单情境下的变化规律(参见例 9、例 10)。

二、图形与几何

(一)图形的认识

1. 能通过实物和模型辨认长方体、正方体、圆柱和球等几何体。

2. 能根据具体事物、照片或直观图辨认从不同角度观察到的简单物体(参见例 11)。

3. 能辨认长方形、正方形、三角形、平行四边形、圆等简单图形。

4. 通过观察、操作，初步认识长方形、正方形的特征。

5. 会用长方形、正方形、三角形、平行四边形或圆拼图。

6. 结合生活情境认识角，了解直角、锐角和钝角。

7. 能对简单几何体和图形进行分类(参见例 20)。

(二)测量

1. 结合生活实际，经历用不同方式测量物体长度的过程，体会建立统一度量单位的重要性。

2. 在实践活动中，体会并认识长度单位千米、米、厘米，知道分米、毫米，能进行简单的单位换算，能恰当地选择长度单位(参见例 12)。

3. 能估测一些物体的长度，并进行测量。

4. 结合实例认识周长，并能测量简单图形的周长，探索并掌握长方形、正方形的周长公式。

5. 结合实例认识面积，体会并认识面积单位厘米^2、分米^2、米^2，能进行简单的单位换算。

6. 探索并掌握长方形、正方形的面积公式，会估计给定简单图形的面积(参见例 13)。

(三)图形的运动

1. 结合实例，感受平移、旋转、轴对称现象(参见例 14)。

2. 能辨认简单图形平移后的图形(参见例 15)。

3. 通过观察、操作，初步认识轴对称图形。

(四)图形与位置

1. 会用上、下、左、右、前、后描述物体的相对位置。

2. 给定东、南、西、北四个方向中的一个方向，能辨认其余三个方向，知道东北、西北、东南、西南四个方向，会用这些词语描绘物体所在的方向(参见例 16)。

三、统计与概率

1. 能根据给定的标准或者自己选定的标准，对事物或数据进行分类，感受分类与分类标准的关系(参见例 17)。

2. 经历简单的数据收集和整理过程，了解调查、测量等收集数据的简单方法，并能用自己的方式(文字、图画、表格等)呈现整理数据的结果(参见例 18)。

3. 通过对数据的简单分析，体会运用数据进行表达与交流的作用，感受数据蕴涵信息(参见例 19)。

四、综合与实践

1. 通过实践活动，感受数学在日常生活中的作用，体验运用所学的知识和方法解决简单问题的过程，获得初步的数学活动经验。

2. 在实践活动中，了解要解决的问题和解决问题的办法。

3. 经历实践操作的过程，进一步理解所学的内容。

（参见例 20、例 21、例 22）

第二学段（4～6 年级）

一、数与代数

（一）数的认识

1. 在具体情境中，认识万以上的数，了解十进制计数法，会用万、亿为单位表示大数。

2. 结合现实情境感受大数的意义，并能进行估计（参见例 23）。

3. 会运用数描述事物的某些特征，进一步体会数在日常生活中的作用（参见例 24）。

4. 知道 2，3，5 的倍数的特征，了解公倍数和最小公倍数；在 1～100 的自然数中，能找出 10 以内自然数的所有倍数，能找出 10 以内两个自然数的公倍数和最小公倍数。

5. 了解公因数和最大公因数；在 1～100 的自然数中，能找出一个自然数的所有因数，能找出两个自然数的公因

数和最大公因数。

6. 了解自然数、整数、奇数、偶数、质(素)数和合数。

7. 结合具体情境，理解小数和分数的意义，理解百分数的意义(参见例 25)；会进行小数、分数和百分数的转化(不包括将循环小数化为分数)。

8. 能比较小数的大小和分数的大小。

9. 在熟悉的生活情境中，了解负数的意义，会用负数表示日常生活中的一些量。

(二)数的运算

1. 能计算三位数乘两位数的乘法，三位数除以两位数的除法。

2. 认识中括号，能进行简单的整数四则混合运算(以两步为主，不超过三步)。

3. 探索并了解运算律(加法的交换律和结合律、乘法的交换律和结合律、乘法对加法的分配律)，会应用运算律进行一些简便运算。

4. 在具体运算和解决简单实际问题的过程中，体会加与减、乘与除的互逆关系。

5. 能分别进行简单的小数和分数(不含带分数)的加、减、乘、除运算及混合运算(以两步为主，不超过三步)。

6. 能解决小数、分数和百分数的简单实际问题。

7. 在具体情境中，了解常见的数量关系：总价＝单价×数量、路程＝速度×时间，并能解决简单的实际问题。

8. 经历与他人交流各自算法的过程，并能表达自己的想法。

9. 在解决问题的过程中，能选择合适的方法进行估算

(参见例 26、例 27)。

10. 能借助计算器进行运算，解决简单的实际问题，探索简单的规律(参见例 28)。

(三)式与方程

1. 在具体情境中能用字母表示数。

2. 结合简单的实际情境，了解等量关系，并能用字母表示。

3. 能用方程表示简单情境中的等量关系(如 $3x+2=5$，$2x-x=3$)，了解方程的作用。

4. 了解等式的性质，能用等式的性质解简单的方程。

(四)正比例、反比例

1. 在实际情境中理解比及按比例分配的含义，并能解决简单的问题。

2. 通过具体情境，认识成正比例的量和成反比例的量。

3. 会根据给出的有正比例关系的数据在方格纸上画图，并会根据其中一个量的值估计另一个量的值(参见例 29)。

4. 能找出生活中成正比例和成反比例关系量的实例，并进行交流。

(五)探索规律

探索给定情境中隐含的规律或变化趋势(参见例 30、例 31)。

二、图形与几何

(一)图形的认识

1. 结合实例了解线段、射线和直线。

2. 体会两点间所有连线中线段最短，知道两点间的距离。

3. 知道平角与周角，了解周角、平角、钝角、直角、锐角之间的大小关系。

4. 结合生活情境了解平面上两条直线的平行和相交(包括垂直)关系。

5. 通过观察、操作，认识平行四边形、梯形和圆，知道扇形，会用圆规画圆。

6. 认识三角形，通过观察、操作，了解三角形两边之和大于第三边、三角形内角和是180°。

7. 认识等腰三角形、等边三角形、直角三角形、锐角三角形、钝角三角形。

8. 能辨认从不同方向(前面、侧面、上面)看到的物体的形状图(参见例32)。

9. 通过观察、操作，认识长方体、正方体、圆柱和圆锥，认识长方体、正方体和圆柱的展开图。

(二)测量

1. 能用量角器量指定角的度数，能画指定度数的角，会用三角尺画30°，45°，60°，90°角。

2. 探索并掌握三角形、平行四边形和梯形的面积公式，

并能解决简单的实际问题。

3. 知道面积单位千米^2、公顷。

4. 通过操作，了解圆的周长与直径的比为定值，掌握圆的周长公式；探索并掌握圆的面积公式，并能解决简单的实际问题。

5. 会用方格纸估计不规则图形的面积(参见例 33)。

6. 通过实例了解体积(包括容积)的意义及度量单位(米^3、分米^3、厘米^3、升、毫升)，能进行单位之间的换算，感受 1 米^3、1 厘米^3 以及 1 升、1 毫升的实际意义。

7. 结合具体情境，探索并掌握长方体、正方体、圆柱的体积和表面积以及圆锥体积的计算方法，并能解决简单的实际问题。

8. 体验某些实物(如土豆等)体积的测量方法(参见例 34)。

(三)图形的运动

1. 通过观察、操作等活动，进一步认识轴对称图形及其对称轴，能在方格纸上画出轴对称图形的对称轴；能在方格纸上补全一个简单的轴对称图形。

2. 通过观察、操作等，在方格纸上认识图形的平移与旋转，能在方格纸上按水平或垂直方向将简单图形平移，会在方格纸上将简单图形旋转 90°(参见例 35)。

3. 能利用方格纸按一定比例将简单图形放大或缩小。

4. 能从平移、旋转和轴对称的角度欣赏生活中的图案，并运用它们在方格纸上设计简单的图案。

(四)图形与位置

1. 了解比例尺；在具体情境中，会按给定的比例进行图上距离与实际距离的换算。

2. 能根据物体相对于参照点的方向和距离确定其位置。

3. 会描述简单的路线图(参见例 36)。

4. 在具体情境中，能在方格纸上用数对(限于正整数)表示位置，知道数对与方格纸上点的对应(参见例 37)。

三、统计与概率

(一)简单数据统计过程

1. 经历简单的收集、整理、描述和分析数据的过程(可使用计算器)。

2. 会根据实际问题设计简单的调查表，能选择适当的方法(如调查、试验、测量)收集数据。

3. 认识条形统计图、扇形统计图、折线统计图；能用条形统计图、折线统计图直观且有效地表示数据(参见例 38)。

4. 体会平均数的作用，能计算平均数，能用自己的语言解释其实际意义(参见例 38)。

5. 能从报纸杂志、电视等媒体中，有意识地获得一些数据信息，并能读懂简单的统计图表(参见例 39)。

6. 能解释统计结果，根据结果作出简单的判断和预测，并能进行交流(参见例 38、例 40)。

(二)随机现象发生的可能性

1. 在具体情境中，通过实例感受简单的随机现象；能列出简单的随机现象中所有可能发生的结果(参见例41)。

2. 通过试验、游戏等活动，感受随机现象结果发生的可能性是有大小的，能对一些简单的随机现象发生的可能性大小作出定性描述，并能进行交流(参见例41)。

四、综合与实践

1. 经历有目的、有设计、有步骤、有合作的实践活动。

2. 结合实际情境，体验发现和提出问题、分析和解决问题的过程。

3. 在给定目标下，感受针对具体问题提出设计思路、制订简单的方案解决问题的过程。

4. 通过应用和反思，进一步理解所用的知识和方法，了解所学知识之间的联系，获得数学活动经验。

(参见例42、例43、例44、例45、例46)

第三学段(7～9年级)

一、数与代数

(一)数与式

1. 有理数

(1)理解有理数的意义，能用数轴上的点表示有理数，

能比较有理数的大小。

(2)借助数轴理解相反数和绝对值的意义，掌握求有理数的相反数与绝对值的方法，知道 $|a|$ 的含义(这里 a 表示有理数)。

(3)理解乘方的意义，掌握有理数的加、减、乘、除、乘方及简单的混合运算(以三步以内为主)。

(4)理解有理数的运算律，能运用运算律简化运算。

(5)能运用有理数的运算解决简单的问题。

2. 实数

(1)了解平方根、算术平方根、立方根的概念，会用根号表示数的平方根、算术平方根、立方根。

(2)了解乘方与开方互为逆运算，会用平方运算求百以内整数的平方根，会用立方运算求百以内整数(对应的负整数)的立方根，会用计算器求平方根和立方根。

(3)了解无理数和实数的概念，知道实数与数轴上的点一一对应，能求实数的相反数与绝对值。

(4)能用有理数估计一个无理数的大致范围(参见例 47)。

(5)了解近似数，在解决实际问题中，能用计算器进行近似计算，并会按问题的要求对结果取近似值。

(6)了解二次根式、最简二次根式的概念，了解二次根式(根号下仅限于数)加、减、乘、除运算法则，会用它们进行有关的简单四则运算(参见例 48)。

3. 代数式

(1)借助现实情境了解代数式，进一步理解用字母表示数的意义(参见例 49)。

(2)能分析具体问题中的简单数量关系，并用代数式

表示。

(3)会求代数式的值；能根据特定的问题查阅资料，找到所需要的公式，并会代入具体的值进行计算。

4. 整式与分式

(1)了解整数指数幂的意义和基本性质；会用科学记数法表示数(包括在计算器上表示)。

(2)理解整式的概念，掌握合并同类项和去括号的法则，能进行简单的整式加法和减法运算；能进行简单的整式乘法运算(其中多项式相乘仅指一次式之间以及一次式与二次式相乘)。

(3)能推导乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，了解公式的几何背景，并能利用公式进行简单计算(参见例50)。

(4)能用提公因式法、公式法(直接利用公式不超过二次)进行因式分解(指数是正整数)。

(5)了解分式和最简分式的概念，能利用分式的基本性质进行约分和通分；能进行简单的分式加、减、乘、除运算。

(二)方程与不等式

1. 方程与方程组

(1)能根据具体问题中的数量关系列出方程，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型(参见例51)。

(2)经历估计方程解的过程(参见例52)。

(3)掌握等式的基本性质。

(4)能解一元一次方程、可化为一元一次方程的分式方程。

(5)掌握代入消元法和加减消元法，能解二元一次方

程组。

(6)*[1]能解简单的三元一次方程组。

(7)理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程。

(8)会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等。

(9)*了解一元二次方程的根与系数的关系。

(10)能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理。

2. 不等式与不等式组

(1)结合具体问题，了解不等式的意义(参见例53)，探索不等式的基本性质。

(2)能解数字系数的一元一次不等式，并能在数轴上表示出解集；会用数轴确定由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集。

(3)能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的问题。

(三)函数

1. 函数

(1)探索简单实例中的数量关系和变化规律，了解常量、变量的意义。

(2)结合实例，了解函数的概念和三种表示法，能举出函数的实例。

(3)能结合图象对简单实际问题中的函数关系进行分析

---

① 标有*的内容为选学内容，不作考试要求。

(参见例 54)。

(4)能确定简单实际问题中函数自变量的取值范围，并会求出函数值。

(5)能用适当的函数表示法刻画简单实际问题中变量之间的关系(参见例 55)。

(6)结合对函数关系的分析，能对变量的变化情况进行初步讨论(参见例 56)。

2. 一次函数

(1)结合具体情境体会一次函数的意义，能根据已知条件确定一次函数的表达式(参见例 57)。

(2)会利用待定系数法确定一次函数的表达式。

(3)能画出一次函数的图象，根据一次函数的图象和表达式 $y=kx+b(k\neq0)$ 探索并理解 $k>0$ 和 $k<0$ 时，图象的变化情况。

(4)理解正比例函数。

(5)体会一次函数与二元一次方程的关系。

(6)能用一次函数解决简单实际问题。

3. 反比例函数

(1)结合具体情境体会反比例函数的意义，能根据已知条件确定反比例函数的表达式。

(2)能画出反比例函数的图象，根据图象和表达式 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 探索并理解 $k>0$ 和 $k<0$ 时，图象的变化情况。

(3)能用反比例函数解决简单实际问题。

4. 二次函数

(1)通过对实际问题的分析，体会二次函数的意义。

(2)会用描点法画出二次函数的图象，通过图象了解二次函数的性质。

(3)会用配方法将数字系数的二次函数的表达式化为$y=a(x-h)^2+k$的形式，并能由此得到二次函数图象的顶点坐标，说出图象的开口方向，画出图象的对称轴，并能解决简单实际问题。

(4)会利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解。

(5)*知道给定不共线三点的坐标可以确定一个二次函数。

二、图形与几何

(一)图形的性质

1. 点、线、面、角

(1)通过实物和具体模型，了解从物体抽象出来的几何体、平面、直线和点等(参见例58)。

(2)会比较线段的长短，理解线段的和、差，以及线段中点的意义。

(3)掌握基本事实：两点确定一条直线。

(4)掌握基本事实：两点之间线段最短。

(5)理解两点间距离的意义，能度量两点间的距离。

(6)理解角的概念，能比较角的大小。

(7)认识度、分、秒，会对度、分、秒进行简单的换算，并会计算角的和、差。

2. 相交线与平行线

(1)理解对顶角、余角、补角等概念，探索并掌握对顶

角相等、同角(等角)的余角相等、同角(等角)的补角相等的性质。

(2)理解垂线、垂线段等概念，能用三角尺或量角器过一点画已知直线的垂线。

(3)理解点到直线的距离的意义，能度量点到直线的距离。

(4)掌握基本事实：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。

(5)识别同位角、内错角、同旁内角。

(6)理解平行线概念；掌握基本事实：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行。

(7)掌握基本事实：过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行。

(8)掌握平行线的性质定理：两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等。*了解平行线性质定理的证明(参见例59)。

(9)能用三角尺和直尺过已知直线外一点画这条直线的平行线。

(10)探索并证明平行线的判定定理：两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等(或同旁内角互补)，那么这两条直线平行；探索并证明平行线的性质定理：两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等(或同旁内角互补)。

(11)了解平行于同一条直线的两条直线平行。

3. 三角形

(1)理解三角形及其内角、外角、中线、高线、角平分线等概念，了解三角形的稳定性。

(2)探索并证明三角形的内角和定理。掌握它的推论：

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和。证明三角形的任意两边之和大于第三边。

(3)理解全等三角形的概念，能识别全等三角形中的对应边、对应角。

(4)掌握基本事实：两边及其夹角分别相等的两个三角形全等(参见例 60)。

(5)掌握基本事实：两角及其夹边分别相等的两个三角形全等(参见例 60)。

(6)掌握基本事实：三边分别相等的两个三角形全等。

(7)证明定理：两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等。

(8)探索并证明角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等；反之，角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上。

(9)理解线段垂直平分线的概念，探索并证明线段垂直平分线的性质定理：线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等；反之，到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上。

(10)了解等腰三角形的概念，探索并证明等腰三角形的性质定理：等腰三角形的两底角相等；底边上的高线、中线及顶角平分线重合。探索并掌握等腰三角形的判定定理：有两个角相等的三角形是等腰三角形。探索等边三角形的性质定理：等边三角形的各角都等于 60°，及等边三角形的判定定理：三个角都相等的三角形(或有一个角是 60°的等腰三角形)是等边三角形。

(11)了解直角三角形的概念，探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形的两个锐角互余，直角三角形斜

边上的中线等于斜边的一半。掌握有两个角互余的三角形是直角三角形。

(12)探索勾股定理及其逆定理，并能运用它们解决一些简单的实际问题。

(13)探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理。

(14)了解三角形重心的概念。

4. 四边形

(1)了解多边形的定义，多边形的顶点、边、内角、外角、对角线等概念；探索并掌握多边形内角和与外角和公式。

(2)理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系；了解四边形的不稳定性。

(3)探索并证明平行四边形的性质定理：平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分；探索并证明平行四边形的判定定理：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；对角线互相平分的四边形是平行四边形。

(4)了解两条平行线之间距离的意义，能度量两条平行线之间的距离。

(5)探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理：矩形的四个角都是直角，对角线相等；菱形的四条边相等，对角线互相垂直；以及它们的判定定理：三个角是直角的四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形；四边相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形。正方形具有矩形和菱形的一切性质(参见例 61)。

(6)探索并证明三角形的中位线定理。

5. 圆

(1)理解圆、弧、弦、圆心角、圆周角的概念，了解等圆、等弧的概念；探索并了解点与圆的位置关系。

(2)*探索并证明垂径定理：垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧。

(3)探索圆周角与圆心角及其所对弧的关系，了解并证明圆周角定理及其推论：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半；直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径；圆内接四边形的对角互补。

(4)知道三角形的内心和外心。

(5)了解直线和圆的位置关系，掌握切线的概念，探索切线与过切点的半径的关系，会用三角尺过圆上一点画圆的切线。

(6)*探索并证明切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等(参见例62)。

(7)会计算圆的弧长、扇形的面积。

(8)了解正多边形的概念及正多边形与圆的关系。

6. 尺规作图

(1)能用尺规完成以下基本作图：作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作一个角的平分线；作一条线段的垂直平分线；过一点作已知直线的垂线。

(2)会利用基本作图作三角形：已知三边、两边及其夹角、两角及其夹边作三角形；已知底边及底边上的高线作等腰三角形；已知一直角边和斜边作直角三角形。

(3)会利用基本作图完成：过不在同一直线上的三点作圆；作三角形的外接圆、内切圆；作圆的内接正方形和正六边形。

(4)在尺规作图中，了解作图的道理，保留作图的痕迹，不要求写出作法。

7. 定义、命题、定理

(1)通过具体实例，了解定义、命题、定理、推论的意义。

(2)结合具体实例，会区分命题的条件和结论，了解原命题及其逆命题的概念。会识别两个互逆的命题，知道原命题成立其逆命题不一定成立。

(3)知道证明的意义和证明的必要性(参见例 74)，知道证明要合乎逻辑(参见例 63)，知道证明的过程可以有不同的表达形式，会综合法证明的格式。

(4)了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的。

(5)通过实例体会反证法的含义。

(二)图形的变化

1. 图形的轴对称

(1)通过具体实例了解轴对称的概念，探索它的基本性质：成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分(参见例 64)。

(2)能画出简单平面图形(点、线段、直线、三角形等)关于给定对称轴的对称图形。

(3)了解轴对称图形的概念；探索等腰三角形、矩形、菱形、正多边形、圆的轴对称性质。

(4)认识并欣赏自然界和现实生活中的轴对称图形。

2. 图形的旋转

(1)通过具体实例认识平面图形关于旋转中心的旋转。

探索它的基本性质：一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等(参见例 64)。

(2)了解中心对称、中心对称图形的概念，探索它的基本性质：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分。

(3)探索线段、平行四边形、正多边形、圆的中心对称性质。

(4)认识并欣赏自然界和现实生活中的中心对称图形。

3. 图形的平移

(1)通过具体实例认识平移，探索它的基本性质：一个图形和它经过平移所得的图形中，两组对应点的连线平行(或在同一条直线上)且相等(参见例 64)。

(2)认识并欣赏平移在自然界和现实生活中的应用。

(3)运用图形的轴对称、旋转、平移进行图案设计。

4. 图形的相似

(1)了解比例的基本性质、线段的比、成比例的线段；通过建筑、艺术上的实例了解黄金分割。

(2)通过具体实例认识图形的相似。了解相似多边形和相似比。

(3)掌握基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。

(4)了解相似三角形的判定定理：两角分别相等的两个三角形相似；两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；三边成比例的两个三角形相似。* 了解相似三角形判定定理的证明。

(5)了解相似三角形的性质定理：相似三角形对应线段

的比等于相似比；面积比等于相似比的平方。

(6)了解图形的位似，知道利用位似可以将一个图形放大或缩小。

(7)会利用图形的相似解决一些简单的实际问题(参见例74)。

(8)利用相似的直角三角形，探索并认识锐角三角函数($\sin A$，$\cos A$，$\tan A$)，知道30°，45°，60°角的三角函数值。

(9)会使用计算器由已知锐角求它的三角函数值，由已知三角函数值求它的对应锐角。

(10)能用锐角三角函数解直角三角形，能用相关知识解决一些简单的实际问题。

5. 图形的投影

(1)通过丰富的实例，了解中心投影和平行投影的概念。

(2)会画直棱柱、圆柱、圆锥、球的主视图、左视图、俯视图，能判断简单物体的视图，并会根据视图描述简单的几何体。

(3)了解直棱柱、圆锥的侧面展开图，能根据展开图想象和制作实物模型。

(4)通过实例，了解上述视图与展开图在现实生活中的应用。

(三)图形与坐标

1. 坐标与图形位置

(1)结合实例进一步体会用有序数对可以表示物体的位置。

(2)理解平面直角坐标系的有关概念，能画出直角坐标

系；在给定的直角坐标系中，能根据坐标描出点的位置、由点的位置写出它的坐标。

(3)在实际问题中，能建立适当的直角坐标系，描述物体的位置(参见例65)。

(4)对给定的正方形，会选择合适的直角坐标系，写出它的顶点坐标，体会可以用坐标刻画一个简单图形。

(5)在平面上，能用方位角和距离刻画两个物体的相对位置(参见例66)。

2. 坐标与图形运动

(1)在直角坐标系中，以坐标轴为对称轴，能写出一个已知顶点坐标的多边形的对称图形的顶点坐标，并知道对应顶点坐标之间的关系。

(2)在直角坐标系中，能写出一个已知顶点坐标的多边形沿坐标轴方向平移后图形的顶点坐标，并知道对应顶点坐标之间的关系。

(3)在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形依次沿两个坐标轴方向平移后所得到的图形与原来的图形具有平移关系，体会图形顶点坐标的变化。

(4)在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形的顶点坐标(有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上)分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形是位似的。

三、统计与概率

(一)抽样与数据分析

1. 经历收集、整理、描述和分析数据的活动，了解数

据处理的过程；能用计算器处理较为复杂的数据。

2. 体会抽样的必要性，通过实例了解简单随机抽样(参见例 67)。

3. 会制作扇形统计图，能用统计图直观、有效地描述数据。

4. 理解平均数的意义，能计算中位数、众数、加权平均数，了解它们是数据集中趋势的描述(参见例 68)。

5. 体会刻画数据离散程度的意义，会计算简单数据的方差(参见例 69)。

6. 通过实例，了解频数和频数分布的意义，能画频数直方图，能利用频数直方图解释数据中蕴涵的信息(参见例 70)。

7. 体会样本与总体的关系，知道可以通过样本平均数、样本方差推断总体平均数和总体方差。

8. 能解释统计结果，根据结果作出简单的判断和预测，并能进行交流(参见例 70)。

9. 通过表格、折线图、趋势图等，感受随机现象的变化趋势(参见例 71)。

(二)事件的概率

1. 能通过列表、画树状图等方法列出简单随机事件所有可能的结果，以及指定事件发生的所有可能结果，了解事件的概率(参见例 72、例 73)。

2. 知道通过大量的重复试验，可以用频率来估计概率。

四、综合与实践

1. 结合实际情境，经历设计解决具体问题的方案，并加以实施的过程，体验建立模型、解决问题的过程，并在此过程中，尝试发现和提出问题。

2. 会反思参与活动的全过程，将研究的过程和结果形成报告或小论文，并能进行交流，进一步获得数学活动经验。

3. 通过对有关问题的探讨，了解所学过知识(包括其他学科知识)之间的关联，进一步理解有关知识，发展应用意识和能力。

(参见例 74、例 75、例 76、例 77、例 78、例 79)

第四部分　实施建议

一、教学建议

教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。

数学教学应根据具体的教学内容，注意使学生在获得间接经验的同时也能够有机会获得直接经验，即从学生实际出发，创设有助于学生自主学习的问题情境，引导学生通过实践、思考、探索、交流等，获得数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，促使学生主动地、富有个性地学习，不断提高发现问题和提出问题的能力、分析问题和解决问题的能力。

在数学教学活动中，教师要把基本理念转化为自己的教学行为，处理好教师讲授与学生自主学习的关系，注重启发学生积极思考；发扬教学民主，当好学生数学活动的组织者、引导者、合作者；激发学生的学习潜能，鼓励学生大胆创新与实践；创造性地使用教材，积极开发、利用各种教学资源，为学生提供丰富多彩的学习素材；关注学生的个体差异，有效地实施有差异的教学，使每个学生都得到充分的发展；合理地运用现代信息技术，有条件的地区，

要尽可能合理、有效地使用计算机和有关软件，提高教学效益。

(一)数学教学活动要注重课程目标的整体实现

为使每个学生都受到良好的数学教育，数学教学不仅要使学生获得数学的知识技能，而且要把知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个方面目标有机结合，整体实现课程目标。

课程目标的整体实现需要日积月累。在日常的教学活动中，教师应努力挖掘教学内容中可能蕴涵的、与上述四个方面目标有关的教育价值，通过长期的教学过程，逐渐实现课程的整体目标。因此，无论是设计、实施课堂教学方案，还是组织各类教学活动，不仅要重视学生获得知识技能，而且要激发学生的学习兴趣，通过独立思考或者合作交流感悟数学的基本思想，引导学生在参与数学活动的过程中积累基本经验，帮助学生形成认真勤奋、独立思考、合作交流、反思质疑等良好的学习习惯。

例如，关于"零指数"教学方案的设计可作如下考虑：教学目标不仅要包括了解零指数幂的"规定"、会进行简单计算，还要包括感受这个"规定"的合理性，并在这个过程中学会数学思考、感悟理性精神(参见例 80)。

(二)重视学生在学习活动中的主体地位

有效的数学教学活动是教师教与学生学的统一，应体现"以人为本"的理念，促进学生的全面发展。

1. 学生是数学学习的主体，在积极参与学习活动的过程中不断得到发展。

学生获得知识，必须建立在自己思考的基础上，可以通过接受学习的方式，也可以通过自主探索等方式；学生应用知识并逐步形成技能，离不开自己的实践；学生在获得知识技能的过程中，只有亲身参与教师精心设计的教学活动，才能在数学思考、问题解决和情感态度方面得到发展(参见例 81)。

2. 教师应成为学生学习活动的组织者、引导者、合作者，为学生的发展提供良好的环境和条件。

教师的"组织"作用主要体现在两个方面：第一，教师应当准确把握教学内容的数学实质和学生的实际情况，确定合理的教学目标，设计一个好的教学方案；第二，在教学活动中，教师要选择适当的教学方式，因势利导、适时调控，努力营造师生互动、生生互动、生动活泼的课堂氛围，形成有效的学习活动。

教师的"引导"作用主要体现在：通过恰当的问题，或者准确、清晰、富有启发性的讲授，引导学生积极思考、求知求真，激发学生的好奇心；通过恰当的归纳和示范，使学生理解知识、掌握技能、积累经验、感悟思想；能关注学生的差异，用不同层次的问题或教学手段，引导每一个学生都能积极参与学习活动，提高教学活动的针对性和有效性。

教师与学生的"合作"主要体现在：教师以平等、尊重的态度鼓励学生积极参与教学活动，启发学生共同探索，与学生一起感受成功和挫折、分享发现和成果。

3. 处理好学生主体地位和教师主导作用的关系。

好的教学活动，应是学生主体地位和教师主导作用的和谐统一。一方面，学生主体地位的真正落实，依赖于教

师主导作用的有效发挥；另一方面，有效发挥教师主导作用的标志，是学生能够真正成为学习的主体，得到全面的发展(参见例31、例51)。

实行启发式教学有助于落实学生的主体地位和发挥教师的主导作用。教师富有启发性的讲授；创设情境、设计问题，引导学生自主探索、合作交流；组织学生操作实验、观察现象、提出猜想、推理论证等，都能有效地启发学生的思考，使学生成为学习的主体，逐步学会学习。

(三)注重学生对基础知识、基本技能的理解和掌握

“知识技能”既是学生发展的基础性目标，又是落实“数学思考”“问题解决”“情感态度”目标的载体。

1. 数学知识的教学，应注重学生对所学知识的理解，体会数学知识之间的关联。

学生掌握数学知识，不能依赖死记硬背，而应以理解为基础，并在知识的应用中不断巩固和深化。为了帮助学生真正理解数学知识，教师应注重数学知识与学生生活经验的联系、与学生学科知识的联系，组织学生开展实验、操作、尝试等活动，引导学生进行观察、分析，抽象概括，运用知识进行判断。教师还应揭示知识的数学实质及其体现的数学思想，帮助学生理清相关知识之间的区别和联系等。

数学知识的教学，要注重知识的“生长点”与“延伸点”，把每堂课教学的知识置于整体知识的体系中，注重知识的结构和体系，处理好局部知识与整体知识的关系，引导学生感受数学的整体性，体会对于某些数学知识可以从不同的角度加以分析、从不同的层次进行理解。

2. 在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的道理。例如，对于整数乘法计算，学生不仅要掌握如何进行计算，而且要知道相应的算理；对于尺规作图，学生不仅要知道作图的步骤，而且要能知道实施这些步骤的理由。

基本技能的形成，需要一定量的训练，但要适度，不能依赖机械的重复操作，要注重训练的实效性。教师应把握技能形成的阶段性，根据内容的要求和学生的实际，分层次地落实。

（四）感悟数学思想，积累数学活动经验

数学思想蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中，是数学知识和方法在更高层次上的抽象与概括，如抽象、分类、归纳、演绎、模型等。学生在积极参与数学活动的过程中，通过独立思考、合作交流，逐步感悟数学思想。

例如，分类是一种重要的数学思想。学习数学的过程中经常会遇到分类问题，如数的分类、图形的分类、代数式的分类、函数的分类等。在研究数学问题中，常常需要通过分类讨论解决问题，分类的过程就是对事物共性的抽象过程。教学活动中，要使学生逐步体会为什么要分类，如何分类，如何确定分类的标准，在分类的过程中如何认识对象的性质，如何区别不同对象的不同性质。通过多次反复的思考和长时间的积累，使学生逐步感悟分类是一种重要的思想。学会分类，可以有助于学习新的数学知识，有助于分析和解决新的数学问题。

数学活动经验的积累是提高学生数学素养的重要标志。帮助学生积累数学活动经验是数学教学的重要目标，是学

生不断经历、体验各种数学活动过程的结果。数学活动经验需要在"做"的过程和"思考"的过程中积淀，是在数学学习活动过程中逐步积累的。

教学中注重结合具体的学习内容，设计有效的数学探究活动，使学生经历数学的发生发展过程，是学生积累数学活动经验的重要途径。例如，在统计教学中，设计有效的统计活动，使学生经历完整的统计过程，包括收集数据、整理数据、展示数据、从数据中提取信息，并利用这些信息说明问题。学生在这样的过程中，不断积累统计活动经验，加深理解统计思想与方法。

"综合与实践"是积累数学活动经验的重要载体。在经历具体的"综合与实践"问题的过程中，引导学生体验如何发现问题，如何选择适合自己完成的问题，如何把实际问题变成数学问题，如何设计解决问题的方案，如何选择合作的伙伴，如何有效地呈现实践的成果，让别人体会自己成果的价值。通过这样的教学活动，学生会逐步积累运用数学解决问题的经验。

(五)关注学生情感态度的发展

根据课程目标，广大教师要把落实情感态度的目标作为己任，努力把情感态度目标有机地融合在数学教学过程之中。设计教学方案、进行课堂教学活动时，应当经常考虑如下问题：

如何引导学生积极参与教学过程？

如何组织学生探索，鼓励学生创新？

如何引导学生感受数学的价值？

如何使学生愿意学，喜欢学，对数学感兴趣？

如何让学生体验成功的喜悦，从而增强自信心？

如何引导学生善于与同伴合作交流，既能理解、尊重他人的意见，又能独立思考、大胆质疑？

如何让学生做自己能做的事，并对自己做的事情负责？

如何帮助学生锻炼克服困难的意志？

如何培养学生良好的学习习惯？

在教育教学活动中，教师要尊重学生，以强烈的责任心、严谨的治学态度、健全的人格感染和影响学生；要不断提高自身的数学素养，善于挖掘数学内容的教育价值；要在教学实践中善于用本标准的理念分析各种现象，恰当地进行养成教育。

（六）合理把握"综合与实践"的实施

"综合与实践"的实施是以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动。它有别于学习具体知识的探索活动，更有别于课堂上教师的直接讲授。它是教师通过问题引领、学生全程参与、实践过程相对完整的学习活动。

积累数学活动经验、培养学生应用意识和创新意识是数学课程的重要目标，应贯穿整个数学课程之中。"综合与实践"是实现这些目标的重要和有效的载体。"综合与实践"的教学，重在实践、重在综合。重在实践是指在活动中，注重学生自主参与、全过程参与，重视学生积极动脑、动手、动口。重在综合是指在活动中，注重数学与生活实际、数学与其他学科、数学内部知识的联系和综合应用。

教师在教学设计和实施时应特别关注的几个环节是：问题的选择，问题的展开过程，学生参与的方式，学生的合作交流，活动过程和结果的展示与评价等。

要使学生能充分、自主地参与“综合与实践”活动，选择恰当的问题是关键。这些问题既可来自教材，也可以由教师、学生开发。提倡教师研制、开发、生成出更多适合本地学生特点的且有利于实现“综合与实践”课程目标的好问题。

实施“综合与实践”时，教师要放手让学生参与，启发和引导学生进入角色，组织好学生之间的合作交流，并照顾到所有的学生。教师不仅要关注结果，更要关注过程，不要急于求成，要鼓励引导学生充分利用“综合与实践”的过程，积累活动经验、展现思考过程、交流收获体会、激发创造潜能。

在实施过程中，教师要注意观察、积累、分析、反思，使“综合与实践”的实施成为提高教师自身和学生素质的互动过程。

教师应该根据不同学段学生的年龄特征和认知水平，根据学段目标，合理设计并组织实施“综合与实践”活动。

(七)教学中应当注意的几个关系

1. 面向全体学生与关注学生个体差异的关系。

教学活动应努力使全体学生达到课程目标的基本要求，同时要关注学生的个体差异，促进每个学生在原有基础上的发展。

对于学习有困难的学生，教师要给予及时的关注与帮助，鼓励他们主动参与数学学习活动，并尝试用自己的方式解决问题、发表自己的看法，要及时地肯定他们的点滴进步，耐心地引导他们分析产生困难或错误的原因，并鼓励他们自己去改正，从而增强学习数学的兴趣和信心。对

于学有余力并对数学有兴趣的学生，教师要为他们提供足够的材料和思维空间，指导他们阅读，发展他们的数学才能。

在教学活动中，要鼓励与提倡解决问题策略的多样化，恰当评价学生在解决问题过程中所表现出的不同水平；问题情境的设计、教学过程的展开、练习的安排等要尽可能地让所有学生都能主动参与，提出各自解决问题的策略，并引导学生通过与他人的交流选择合适的策略，丰富数学活动的经验，提高思维水平。

2. "预设"与"生成"的关系。

教学方案是教师对教学过程的"预设"，教学方案的形成依赖于教师对教材的理解、钻研和再创造。理解和钻研教材，应以本标准为依据，把握好教材的编写意图和教学内容的教育价值；对教材的再创造，集中表现在：能根据所教班级学生的实际情况，选择贴切的教学素材和教学流程，准确地体现基本理念和课程内容规定的要求。

实施教学方案，是把"预设"转化为实际的教学活动。在这个过程中，师生双方的互动往往会"生成"一些新的教学资源，这就需要教师能够及时把握，因势利导，适时调整预案，使教学活动收到更好的效果。

3. 合情推理与演绎推理的关系。

推理贯穿于数学教学的始终，推理能力的形成和提高需要一个长期的、循序渐进的过程。义务教育阶段要注重学生思考的条理性，不要过分强调推理的形式。

推理包括合情推理和演绎推理。教师在教学过程中，应该设计适当的学习活动，引导学生通过观察、尝试、估算、归纳、类比、画图等活动发现一些规律，猜测某些结

论，发展合情推理能力；通过实例使学生逐步意识到，结论的正确性需要演绎推理的确认，可以根据学生的年龄特征提出不同程度的要求。

在第三学段中，应把证明作为探索活动的自然延续和必要发展，使学生知道合情推理与演绎推理是相辅相成的两种推理形式。“证明”的教学应关注学生对证明必要性的感受，对证明基本方法的掌握和证明过程的体验。证明命题时，应要求证明过程及其表述符合逻辑，清晰而有条理（参见例62）。此外，还可以恰当地引导学生探索证明同一命题的不同思路和方法，进行比较和讨论，激发学生对数学证明的兴趣，发展学生思维的广阔性和灵活性。

4. 使用现代信息技术与教学手段多样化的关系。

积极开发和有效利用各种课程资源，合理地应用现代信息技术，注重信息技术与课程内容的整合，能有效地改变教学方式，提高课堂教学的效益。有条件的地区，教学中要尽可能地使用计算器、计算机以及有关软件；暂时没有这种条件的地区，一方面要积极创造条件改善教学设施，另一方面广大教师应努力自制教具以弥补教学设施的不足。

在学生理解并能正确应用公式、法则进行计算的基础上，鼓励学生用计算器完成较为繁杂的计算。课堂教学、课外作业、实践活动中，应当根据课程内容的要求，允许学生使用计算器，还应当鼓励学生用计算器进行探索规律等活动（参见例28、例50）。

现代信息技术的作用不能完全替代原有的教学手段，其真正价值在于实现原有的教学手段难以达到甚至达不到的效果。例如，利用计算机展示函数图象、几何图形的运动变化过程；从数据库中获得数据，绘制合适的统计图表；

利用计算机的随机模拟结果，引导学生更好地理解随机事件以及随机事件发生的概率；等等。在应用现代信息技术的同时，教师还应注重课堂教学的板书设计。必要的板书有利于实现学生的思维与教学过程同步，有助于学生更好地把握教学内容的脉络。

二、评价建议

评价的主要目的是全面了解学生数学学习的过程和结果，激励学生学习和改进教师教学。评价应以课程目标和课程内容为依据，体现数学课程的基本理念，全面评价学生在知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等方面的表现。

评价不仅要关注学生的学习结果，更要关注学生在学习过程中的发展和变化。应采用多样化的评价方式，恰当呈现并合理利用评价结果，发挥评价的激励作用，保护学生的自尊心和自信心。通过评价得到的信息，可以了解学生数学学习达到的水平和存在的问题，帮助教师进行总结与反思，调整和改进教学内容与教学过程。

(一)基础知识和基本技能的评价

对基础知识和基本技能的评价，应以各学段的具体目标和要求为标准，考查学生对基础知识和基本技能的理解与掌握程度，以及在学习基础知识和基本技能过程中的表现。在对学生学习基础知识和基本技能的结果进行评价时，应该准确地把握“了解、理解、掌握、应用”不同层次的要求。在对学生学习过程进行评价时，应依据“经历、体验、

探索"不同层次的要求，采取灵活多样的方法，定性与定量相结合，以定性评价为主。

每一学段的目标是该学段结束时学生应达到的要求，教师需要根据学习的进度和学生的实际情况确定具体的要求。例如，下表是对第一学段有关计算技能的基本要求，这些要求是在学段结束时应达到的，评价时应注意把握尺度，对计算速度不作过高要求。

第一学段计算技能评价要求

学习内容	速度要求
20 以内加减法和表内乘除法口算	8～10 题/分
百以内加减法和一位数乘除两位数口算	3～4 题/分
两位数和三位数加减法笔算	2～3 题/分
两位数乘两位数笔算	1～2 题/分
一位数乘除两位数和三位数笔算	1～2 题/分

教师应允许学生经过较长时间的努力，随着数学知识与技能的积累逐步达到学段目标。在实施评价时，可以对部分学生采取"延迟评价"[①]的方式，提供再次评价的机会，使他们看到自己的进步，树立学好数学的信心。

（二）数学思考和问题解决的评价

数学思考和问题解决的评价要依据总目标与学段目标

① 延迟评价是指在平时学习过程中，对尚未达到目标要求的学生，可暂时不给明确的评价结果，给学生更多的机会，当取得较好的成绩时再给予评价，以保护学生学习的积极性。

的要求，体现在整个数学学习过程中。

对数学思考和问题解决的评价应当采用多种形式和方法，特别要重视在平时教学和具体的问题情境中进行评价。例如，在第二学段，教师可以设计下面的活动，评价学生数学思考和问题解决的能力：

用长为50厘米的细绳围成一个边长为整厘米数的长方形，怎样才能使面积达到最大？

在对学生进行评价时，教师可以关注以下几个不同的层次：

第一，学生是否能理解题目的意思，能否提出解决问题的策略，如通过画图进行尝试；

第二，学生能否列举若干满足条件的长方形，通过列表等形式将其进行有序排列；

第三，在观察、比较的基础上，学生能否发现长和宽变化时，面积的变化规律，并猜测问题的结果；

第四，对猜测的结果给予验证；

第五，鼓励学生发现和提出一般性问题，如，猜想当长和宽的变化不限于整厘米数时，面积何时最大。

为此，教师可以根据实际情况，设计有层次的问题评价学生的不同水平。例如，设计下面的问题：

(1)找出三个满足条件的长方形，记录下长方形的长、宽和面积，并依据长或宽的长短有序地排列出来。

(2)观察排列的结果，探索长方形的长和宽发生变化时，面积相应的变化规律。猜测当长和宽各为多少厘米时，长方形的面积最大。

(3)列举满足条件的长和宽的所有可能结果，验证猜测。

(4)猜想：如果不限制长方形的长和宽为整厘米数，怎样才能使它的面积最大？

教师可以预设目标：对于第二学段的学生，能够完成(1)(2)题就达到基本要求，对于能完成(3)(4)题的学生，则给予进一步的肯定。

学生解决问题的策略可能与教师的预设有所不同，教师应给予恰当的评价。

(三)情感态度的评价

情感态度的评价应依据课程目标的要求，采用适当的方法进行。主要方式有课堂观察、活动记录、课后访谈等。

情感态度评价主要在平时教学过程中进行，注重考查和记录学生在不同方面的表现，了解学生情感态度的状况及变化。例如，

- 主动参与学习活动；
- 学习数学的兴趣和自信心；
- 克服困难的勇气；
- 与他人合作；
- 与同伴和老师交流；

……

教师可以根据实际情况用灵活多样的方式记录学生情感态度的情况，用恰当的方式给学生以反馈和指导。

(四)注重对学生数学学习过程的评价

学生在数学学习过程中，知识技能、数学思考、问题解决和情感态度等方面的表现不是孤立的，这些方面的发展综合体现在数学学习过程之中。在评价学生每一个方面

表现的同时，要注重对学生学习过程的整体评价，分析学生在不同阶段的表现特征和发展变化。评价时应采取灵活的方式记录、保留和分析学生在不同方面的表现。例如，

- 主动参与学习活动；
- 提出问题和分析问题；
- 独立思考问题；
- 与他人合作交流；
- 尝试从不同角度思考问题；
- 有条理地表述自己的思考过程；
- 倾听和理解别人的思路；
- 反思自己思考过程的意识；

……

还可以通过建立成长记录等方式，使学生记录和反思学习数学的情况与成长的历程。

(五)体现评价主体的多元化和评价方式的多样化

评价主体的多元化是指教师、家长、同学及学生本人都可以作为评价者，可以综合运用教师评价、学生自我评价、学生相互评价、家长评价等方式，对学生的学习情况和教师的教学情况进行全面的考查。例如，每一个学习单元结束时，教师可以要求学生自我设计一个“学习小结”，用合适的形式(表、图、卡片、电子文本等)归纳学到的知识和方法，学习中的收获，遇到的问题，等等。教师可以通过学习小结对学生的学习情况进行评价，也可以组织学生将自己的学习小结在班级展示交流，通过这种形式总结自己的进步，反思自己的不足以及需要改进的地方，汲取他人值得借鉴的经验。条件允许时，可以请家长参与评价。

评价方式多样化体现在多种评价方法的运用，包括书面测验、口头测验、开放式问题、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、成长记录等(参见例 82)。在条件允许的地方，也可以采用网上交流的方式进行评价。每种评价方式都具有各自的特点，教师应结合学习内容及学生学习的特点，选择适当的评价方式。例如，可以通过课堂观察了解学生学习的过程与学习态度，从作业中了解学生基础知识与基本技能掌握的情况，从探究活动中了解学生独立思考的习惯和合作交流的意识，从成长记录中了解学生的发展变化。

(六)恰当地呈现和利用评价结果

评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。第一学段的评价应当以描述性评价为主，第二学段采用描述性评价和等级评价相结合的方式，第三学段可以采用描述性评价和等级(或百分制)评价相结合的方式。

评价结果的呈现和利用应有利于增强学生学习数学的自信心，提高学生学习数学的兴趣，使学生养成良好的学习习惯，促进学生的发展。评价结果的呈现，应该更多地关注学生的进步，关注学生已经掌握了什么，获得了哪些提高，具备了什么能力，还有什么潜能，在哪些方面还存在不足，等等。

例如，下面是对某同学第二学段关于“统计与概率”学习的书面评语：

王小明同学，本学期我们学习了收集、整理和表达数据。你通过自己的努力，能收集、记录数据，知道如何求平均数，了解统计图的特点，制作的统计图很出色，在这

方面表现突出。但你在使用语言解释统计结果方面还存在一定差距。继续努力，小明！评定等级：B。

这个以定性为主的评语，实际上也是教师与学生的一次情感交流。学生阅读这一评语，能够获得成功的体验，树立学好数学的自信心，也知道自己的不足和努力方向。

教师要注意分析全班学生评价结果随时间的变化，从而了解自己教学的成绩和问题，分析、反思教学过程中影响学生能力发展和素质提高的原因，寻求改善教学的对策。同时，以适当的方式，将学生一些积极的变化及时反馈给学生。

（七）合理设计与实施书面测验

书面测验是考查学生课程目标达成状况的重要方式，合理地设计和实施书面测验有助于全面考查学生的数学学业成就，及时反馈教学成效，不断提高教学质量。

1. 对于学生基础知识和基本技能达成情况的评价，必须准确把握课程内容中的要求。例如，知道 $|a|$ 的含义（a 表示有理数），了解二次根式（根号下仅限于数）加、减、乘、除运算法则。设计试题时应符合这种要求。

课程内容中的下列选学内容，不得列入考查（考试）范围：能解简单的三元一次方程组，了解一元二次方程的根与系数的关系，知道给定不共线三点的坐标可以确定一个二次函数，了解平行线性质定理的证明，探索并证明垂径定理和切线长定理，了解相似三角形判定定理的证明。

对于相似三角形的判定定理、性质定理的考查，本标准的要求是“了解”，不要求用这些定理证明其他命题。

此外，在考试中，几何命题的证明应以“图形的性质”

中所列出的基本事实和定理作为依据。

对基础知识和基本技能的考查，要注重考查学生对其中所蕴涵的数学本质的理解，考查学生能否在具体情境中合理应用。因此，在设计试题时，应淡化特殊的解题技巧，不出偏题怪题。

2. 在设计试题时，应该关注并且体现本标准的设计思路中提出的几个核心词：数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想，以及应用意识和创新意识。

3. 根据评价的目的合理地设计试题的类型，有效地发挥各种类型题目的功能。例如，为考查学生从具体情境中获取信息的能力，可以设计阅读分析的问题；为考查学生的探究能力，可以设计探索规律的问题；为考查学生解决问题的能力，可以设计具有实际背景的问题；为了考查学生的创造能力，可以设计开放性问题。

4. 在书面测验中，积极探索可以考查学生学习过程的试题，了解学生的学习过程。

三、教材编写建议

数学教材为学生的数学学习活动提供了学习主题、基本线索和知识结构，是实现数学课程目标、实施数学教学的重要资源。

数学教材的编写应以本标准为依据。教材编写要努力凸显特色，积极探索教材的多样化。教材所选择的学习素材应尽量与学生的生活现实、数学现实、其他学科现实相联系，应有利于加深学生对所要学习内容的数学理解。教

材内容的呈现要体现数学知识的整体性，体现重要的数学知识和方法的产生、发展和应用过程；应引导学生进行自主探索与合作交流，并关注对学生人文精神的培养。教材的编写要有利于调动教师的主动性和积极性，有利于教师进行创造性教学。

课程内容是按照学段制订的，并未规定学习内容的呈现顺序。因此，教材可以在不违背数学知识逻辑关系的基础上，根据学生的数学学习认知规律、知识背景和活动经验，合理地安排学习内容，形成自己的编排体系，体现出自己的风格和特色。

(一)教材编写应体现科学性

科学性是对教材编写的基本要求。教材一方面要符合数学的学科特征，另一方面要符合学生的认知规律。

1. 全面体现本标准提出的理念和目标。

教材的编写应以本标准为依据，在准确理解的基础上，全面体现和落实本标准提出的基本理念和各项目标。

2. 体现课程内容的数学实质。

教材中学习素材的选择，图片、情境、实例与活动栏目等的设置，拓展内容的编写，以及其他课程资源的利用，都应当与所安排的数学内容有实质性联系，有利于提高学生对数学实质的理解，有利于提高学生对所学内容的兴趣。

3. 准确把握课程内容要求。

本标准对于义务教育阶段的数学教学内容有明确和具体的目标要求，教材的编写应遵循学生的认知规律，准确地把握“过程目标”和“结果目标”要求的程度。例如，关于距离的概念，在第二学段要求“知道”两点间的距离，在第

三学段要求"理解"两点间距离的意义，"能"度量两点间的距离。在编写相关内容时，一方面要把握好"知道"与"理解""能"之间程度的差异，另一方面也要注意内容之间的衔接。

4. 教材的编写要有一定的实验依据。

教材的内容、实例的设计、习题的配置等，要经过课堂教学的实践检验，特别是新增的内容要经过较大范围的实验，根据实践的结果推敲可行性，并不断改进与完善。

(二)教材编写应体现整体性

教材编写应当体现整体性，注重突出核心内容，注重内容之间的相互联系，注重体现学生学习的整体性。

1. 整体体现课程内容的核心。

教材的整体设计要体现内容领域的核心。本标准在设计思路中提出了几个核心词：数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想，以及应用意识和创新意识，它们是义务教育阶段数学课程内容的核心，也是教材的主线。因此，教材应当围绕这些核心内容进行整体设计和编排。

例如，在方程、不等式和函数的各部分内容编排中，应整体考虑模型思想的体现，突出建立模型、求解模型的过程。

再例如，推理能力包括合情推理和演绎推理，无论是"数与代数""图形与几何"还是"统计与概率"的内容编排中，都要尽可能地为学生提供观察、操作、归纳、类比、猜测、证明的机会，发展学生的推理能力。

2. 整体考虑知识之间的关联。

教材的整体设计要呈现不同数学知识之间的关联。一

些数学知识之间存在逻辑顺序，教材编写应有利于学生感悟这种顺序。一些知识之间存在着实质性的联系，这种联系体现在相同的内容领域，也体现在不同的内容领域。例如，在“数与代数”的领域内，函数、方程、不等式之间均存在着实质性联系。此外，代数与几何、统计之间也存在着一定的实质性联系。

帮助学生理解类似的实质性联系，是数学教学的重要任务。为此，教材在内容的素材选取、问题设计和编排体系等方面应体现这些实质性联系，展示数学知识的整体性和数学方法的一般性。

3. 重要的数学概念与数学思想要体现螺旋上升的原则。

数学中有一些重要内容、方法、思想是需要学生经历较长的认识过程，逐步理解和掌握的，如分数、函数、概率、数形结合、逻辑推理、模型思想等。因此，教材在呈现相应的数学内容与思想方法时，应根据学生的年龄特征与知识积累，在遵循科学性的前提下，采用逐级递进、螺旋上升的原则。螺旋上升是指在深度、广度等方面都要有实质性的变化，即体现出明显的阶段性要求。

例如，函数是“数与代数”的重要内容，也是义务教育阶段学生比较难理解和掌握的数学概念之一，本标准在三个学段中均安排了与函数关联的内容目标，希望学生能够逐渐加深对函数的理解。因此，教材对函数内容的编排应体现螺旋上升的原则，分阶段逐渐深化。依据课程内容的要求，教材可以将函数内容的学习分为三个主要阶段：

第一阶段，通过一些具体实例，让学生感受数量的变化过程，以及变化过程中变量之间的对应关系，探索其中的变化规律及基本性质，尝试根据变量的对应关系作出预

测，获得函数的感性认识。

第二阶段，在感性认识的基础上，归纳概括出函数的定义，并研究具体的函数及其性质，了解研究函数的基本方法，借助函数的知识和方法解决问题等，使得学生能够在操作层面认识和理解函数。

第三阶段，了解函数与其他相关数学内容之间的联系（如与方程之间、不等式之间的联系），使得学生能够一般性地了解函数的概念。

4. 整体性体现还应注意以下几点。

配置习题时应考虑其与相应内容之间的协调性。一方面，要保证配备必要的习题帮助学生巩固、理解所学知识内容；另一方面，又要避免配置的习题所涉及的知识超出相应的内容要求。

教材内容的呈现既要考虑不同年龄学生的特点，又要使整套教材的编写体例、风格协调一致。

数学文化作为教材的组成部分，应渗透在整套教材中。为此，教材可以适时地介绍有关背景知识，包括数学在自然与社会中的应用，以及数学发展史的有关材料，帮助学生了解在人类文明发展中数学的作用，激发学习数学的兴趣，感受数学家治学的严谨，欣赏数学的优美。例如，可以介绍《九章算术》、珠算、《几何原本》、机器证明、黄金分割、CT 技术、布丰投针等。

（三）教材内容的呈现应体现过程性

教材编写不是单纯的知识介绍，学生学习也不是单纯地模仿、练习和记忆。因此，教材应选用合适的学习素材，介绍知识的背景；设计必要的数学活动，让学生通过观察、

实验、猜测、推理、交流、反思等，感悟知识的形成和应用。恰当地让学生经历这样的过程，对于他们理解数学知识与方法、形成良好的数学思维习惯、增强应用意识、提高解决问题的能力有着重要的作用。

1. 体现数学知识的形成过程。

在设计一些新知识的学习活动时，教材可以展现"知识背景—知识形成—揭示联系"的过程。这个过程要有利于激发学习兴趣，理解数学实质，发展思考能力，了解知识之间的关联。例如，分数、负数和无理数的引入都可以体现这样的过程。

2. 反映数学知识的应用过程。

教材应当根据课程内容，设计运用数学知识解决问题的活动。这样的活动应体现"问题情境—建立模型—求解验证"的过程，这个过程要有利于理解和掌握相关的知识技能，感悟数学思想，积累活动经验；要有利于提高发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力，增强应用意识和创新意识。

每一册教材至少应当设计一个适用于"综合与实践"学习活动的题材，这样的题材可以以"长作业"的形式出现，将课堂内的数学活动延伸到课堂外，经历收集数据、查阅资料、独立思考、合作交流、实践检验、推理论证等多种形式的活动。提倡在教材中设计更为丰富的"综合与实践"活动题材，供教师选择。

(四)呈现内容的素材应贴近学生现实

素材的选用应当充分考虑学生的认知水平和活动经验。这些素材应当在反映数学本质的前提下尽可能地贴近学生

的现实，以利于他们经历从现实情境中抽象出数学知识与方法的过程。学生的现实主要包含以下三个方面。

1. 生活现实。

在义务教育阶段的数学课程中，许多内容都可以在学生的生活实际中找到背景。

第一学段，学生所感知的生活面较窄，从他们身边熟悉的、有趣的事物中选取学习素材，容易激发他们学习数学的兴趣，使他们感受到数学就在自己的身边，也易于他们理解相关的数学知识，体会到数学的作用。

第二学段、第三学段，学生的活动空间有了较大的扩展，他们感兴趣的问题已拓展到客观世界的许多方面，他们逐渐关注来源于自然、社会中更为广泛的现象和问题，对具有一定挑战性的内容表现出更大的兴趣。因此，教材所选择的素材应尽量来源于自然、社会中的现象和问题。如与现实生活有关的图片和图形(照片、简单的模型图、平面图、地图等)，以使学生感受到数学的价值和趣味。

2. 数学现实。

随着数学学习的深入，学生所积累的数学知识和方法就成为学生的"数学现实"，这些现实应当成为学生进一步学习数学的素材。选用这些素材，不仅有利于学生理解所学知识的内涵，还能够更好地揭示相关数学知识之间的内在关联，有利于学生从整体上理解数学，构建数学认知结构。例如，因式分解知识的引入可以借助整数的分解，平行四边形概念的引入可以借助三角形，等等。

3. 其他学科现实。

数学的许多内容与其他学科知识有着密切的联系，随着学生学习的深入，其他学科的知识也就成为学生的"现

实”，教材在选择数学学习素材时应当予以关注。

(五)教材内容设计要有一定的弹性

按照本标准要求，教材的编写要面向全体学生，也要考虑到学生发展的差异，在保证基本要求的前提下，体现一定的弹性，以满足学生的不同需求，使不同的人在数学上得到不同的发展，也便于教师发挥自己的教学创造性。例如：

1. 就同一问题情境提出不同层次的问题或开放性问题。

2. 提供一定的阅读材料，包括史料、背景材料、知识应用等，供学生选择阅读。

3. 习题的选择和编排突出层次性，设置巩固性问题、拓展性问题、探索性问题等；凡不要求全体学生掌握的习题，需要明确标出。

4. 在设计综合与实践活动时，所选择的课题要使所有的学生都能参与，不同的学生可以通过解决问题的活动，获得不同的体验。

5. 编入一些拓宽知识或者方法的选学内容，增加的内容应注重于介绍重要的数学概念、数学思想方法，而不应该片面追求内容的深度、问题的难度、解题的技巧。

6. 设计一些课题和阅读材料，引导学生借助算盘、函数计算器、计算机等工具，进行探索性学习活动。

(六)教材编写要体现可读性

教材应具备可读性，易于学生接受，激发学生学习兴趣，为学生提供思考的空间。教材可读与否，对不同学段的学生具有不同的标准。因此，教材的呈现应当在准确表

达数学含义的前提下，符合学生年龄特征，从而有助于他们理解数学。

对于第一学段的学生，可以采用图片、游戏、卡通、表格、文字等多种方式，直观形象、图文并茂、生动有趣地呈现素材，提高他们的学习兴趣。

对于第二学段的学生，由于他们具备了一定的文字理解和表达能力，所以教材的呈现应在运用学生感兴趣的图片、表格、文字等形式的同时，逐渐增加数学语言的比重。

对于第三学段的学生，随着数学学习、语言学习的深入，他们使用文字和数学符号的能力已经有了一定程度的发展。教材的呈现可以将实物照片、图形、图表、文字、数学符号等多种形式结合起来。

四、课程资源开发与利用建议

数学课程资源是指应用于教与学活动中的各种资源。主要包括文本资源——如教科书、教师用书，教与学的辅助用书、教学挂图等；信息技术资源——如网络、教学软件、多媒体光盘等；社会教育资源——如教育与学科专家，图书馆、少年宫、博物馆，报纸杂志、电视广播等；环境与工具——如日常生活环境中的数学信息，用于操作的学具或教具，数学实验室等；生成性资源——如教学活动中提出的问题、学生的作品、学生学习过程中出现的问题、课堂实录等。

数学教学过程中恰当地使用数学课程资源，将在很大程度上提高学生从事数学活动的水平和教师从事教学活动的质量。教材编写者、教学研究人员、教师和有关人员应

依据本标准，有意识、有目的地开发和利用各种课程资源。

(一)文本资源

关于教科书、教师用书的开发，参见“教材编写建议”。

学生学习辅助用书主要是为了更好地激发学生学习数学的兴趣和动力，帮助学生理解所学内容，巩固相关技能，开拓数学视野，进而满足他们学习数学的个性化需求。这一类用书的开发不能仅仅着眼于解题活动和技能训练，单纯服务于应试。更重要的，还应当开发多品种、多形式的数学普及类读物，使得学生在义务教育阶段能够有足够的机会阅读数学、了解数学、欣赏数学。

教师教学辅助用书主要是为了加深教师对于教学内容的理解，加强教师对于学生学习过程的认识，提高教师采用有效教学方法的能力。为此，在编制教学辅助用书时，提倡以研讨数学教学过程中的问题为主线，赋予充分的教学实例，注重数学教育理论与教学实践的有机结合，使之成为提高教师专业水准的有效读物。

(二)信息技术资源

信息技术能向学生提供并展示多种类型的资料，包括文字、声音、图像等，并能灵活选择与呈现；可以创设、模拟多种与教学内容适应的情境；能为学生从事数学探究提供重要的工具；可以使得相距千里的个体展开面对面交流。信息技术是从根本上改变数学学习方式的重要途径之一，必须充分加以应用。

信息技术资源的开发与利用需要关注三个方面：

其一，将信息技术作为教师从事数学教学实践与研究

的辅助性工具。为此，教师可以通过网络查阅资料、下载富有参考价值的实例和课件，并加以改进，使之适用于自身课堂教学；可以根据需要开发音像资料，构建生动活泼的教学情境；还可以设计与制作有关的计算机软件、教学课件，用于课堂教学活动研究等。

其二，将信息技术作为学生从事数学学习活动的辅助性工具。为此，可以引导学生积极有效地将计算器、计算机用于数学学习活动之中。例如，在探究活动中借助计算器(机)处理复杂数据和图形，发现其中存在的数学规律；使用有效的数学软件绘制图形，呈现抽象对象的直观背景，加深对相关数学内容的理解；通过互联网搜寻解决问题所需要的信息资料，帮助自己形成解决问题的基本策略和方法等。

其三，将计算器等技术作为评价学生数学学习的辅助性工具。为此，应当积极开展基于计算器环境的评价方式与评价工具研究，如哪些试题或评价任务适宜在计算器环境下使用，哪些不适宜，等等。

总之，一切有条件和能够创造条件的地区与学校，都应积极开发与利用计算机(器)、多媒体、互联网等信息技术资源，组织教学研究人员、专业技术人员和教师开发与利用适合自身课堂教学的信息技术资源，以充分发挥其优势，为学生的学习和发展提供丰富多彩的教育环境及有力的学习工具和评价工具；为学生提供探索复杂问题、多角度理解数学的机会，丰富学生的数学视野，提高学生的数学素养；为有需要的学生提供个体学习的机会，以便于教师为特殊需要的学生提供帮助；为教育条件欠发达地区的学生提供教学指导和智力资源，更有效地吸引和帮助学生

进行数学学习。

值得注意的是，教学中应有效地使用信息技术资源，发挥其对学习数学的积极作用，减少其对学习数学的消极作用。例如，不应在数学教学过程中简单地将信息技术作为缩短思维过程、加大教学容量的工具；不提倡用计算机上的模拟实验来代替学生能够操作的实践活动；也不提倡利用计算机演示来代替学生的直观想象，弱化学生对数学规律的探索活动。同时，学校之间要加强交流，共享资源，避免相关教学资源的低水平重复，也可以积极引进国外先进的教育软件，并根据本学校学生的特点加以改进。

(三)社会教育资源

在数学教学活动中，应当积极开发利用社会教育资源。例如，邀请有关专家向学生介绍数学在自然界、科学技术、社会生活和其他学科发展中的应用，帮助学生体会数学的价值；邀请教学专家与教师共同开展教学研究，以促进教师的专业成长。

学校应充分利用图书馆、少年宫、博物馆、科技馆等，寻找合适的学习素材，如学生感兴趣的自然现象、工程技术、历史事件、社会问题、数学史与数学家的故事和其他学科的相关内容等，以开阔学生的视野，丰富教师的教学资源。

报纸杂志、电视广播和网络等媒体，常常为我们提供许多贴近时代、贴近生活的有意义话题，教师要从中充分挖掘适合学生学习的素材，向学生介绍其中与数学有关的栏目，组织学生对某些内容进行交流，以增强学生学习数学的兴趣，提高学生运用数学解决问题的能力。

(四)环境与工具

教师应当充分利用日常生活环境中与数学有关的信息，开发成为教学资源。教师应当努力开发制作简便实用的教具和学具，有条件的学校可以建立“数学实验室”供学生使用，以拓宽他们的学习领域，培养他们的实践能力，发展其个性品质与创新精神，促进不同的学生在数学上得到不同的发展。

(五)生成性资源

生成性资源是在教学过程中动态生成的，如师生交互及生生交流过程中产生的新情境、新问题、新思路、新方法、新结果等。合理地利用生成性资源有利于提高教学的有效性。

附　　录

附录1　有关行为动词的分类

本标准中有两类行为动词：一类是描述结果目标的行为动词，包括“了解”“理解”“掌握”“运用”等；另一类是描述过程目标的行为动词，包括“经历”“体验”“探索”等。这些词的基本含义如下。

了解：从具体实例中知道或举例说明对象的有关特征；根据对象的特征，从具体情境中辨认或者举例说明对象。

理解：描述对象的特征和由来，阐述此对象与相关对象之间的区别和联系。

掌握：在理解的基础上，把对象用于新的情境。

运用：综合使用已掌握的对象，选择或创造适当的方法解决问题。

经历：在特定的数学活动中，获得一些感性认识。

体验：参与特定的数学活动，主动认识或验证对象的特征，获得一些经验。

探索：独立或与他人合作参与特定的数学活动，理解或提出问题，寻求解决问题的思路，发现对象的特征及其与相关对象的区别和联系，获得一定的理性认识。

［说明］ 在本标准中，使用了一些词，表述与上述行为动词同等水平的要求程度。这些词与上述行为动词之间的关系如下。

(1)了解

同类词：知道，初步认识。

实例：知道三角形的内心和外心；能结合具体情境初步认识小数和分数。

(2)理解

同类词：认识，会。

实例：认识三角形；会用长方形、正方形、三角形、平行四边形或圆拼图。

(3)掌握

同类词：能。

实例：能认、读、写万以内的数，能用数表示物体的个数或事物的顺序和位置。

(4)运用

同类词：证明。

实例：证明定理：两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等。

(5)经历

同类词：感受，尝试。

实例：在生活情境中感受大数的意义；尝试发现和提出问题。

(6)体验

同类词：体会。

实例：结合具体情境，体会整数四则运算的意义。

附录 2　课程内容及实施建议中的实例

课程内容

第一学段(1~3 年级)

数与代数

例 1　用算盘上的算珠表示三位数。

[说明]　算盘是中国的重大发明，体现了十进位值制计数法。算盘最大的特点是：一颗下珠表示 1，一颗上珠表示 5。使用算盘要注意以下两点：

(1)先确定个位。先任意选定某档为个位，然后依次左进为十位、百位、千位等。

(2)再用算珠表示数。个位上的几表示几个，十位上的几表示几十，……某个数位上是 0，则以不拨珠空档表示。

如 513，在算盘上就是

百　十　个
位　位　位

更大的数可用同样的方法表示。

例2 将数50，98，38，10，51排序，用“>”或“<”表示。用大得多、大一些、小一些、小得多等语言进一步描述它们之间的关系。

［说明］ 符号“>”或“<”表达的是数量间的大小关系，希望学生能够理解符号的含义并能合理使用，这个过程可以帮助学生建立数感。

让学生将这些数排序，学生可能会有不同的排序方法。例如，先找到最小(大)的，然后在剩余的数中再找到最小(大)的，依次将五个数按从小(大)到大(小)的顺序进行排序；或者先固定一个数(如50)，拿第二个数(98)与之比较，然后取第三个数与前两个数比较，根据它们之间的大小关系决定位置，这样继续下去，最后将五个数排序。无论学生的出发点如何，只要思路清晰、排序正确即可。

用语言描述几个数之间的大小关系时，结论是相对的。例如，可以说51比50大一些，98比10大得多；而50比38是大一些，还是大得多，可能会有不同看法，但不应当出现逻辑上的混乱，如“50比10大一些，50比38大得多”。

例3 1 200张纸大约有多厚？你的1 200步大约有多长？1 200名学生站成做广播操的队形需要多大的场地？

［说明］ 通过对1 200在不同情境中的意义的了解，感受数与生活实际的关系。上述三个问题是类似的，可以让学生学会举一反三。

针对问题“1 200张纸大约有多厚”，教学中可以作如下设计：

(1)一本数学教科书大约由50张纸装订而成。可以请学生先观察自己的教科书，感受一本书的厚度。

(2)将10本教科书依次叠在一起，每增加一本都请学生感受一次纸张的数量，感受数量由小增大的过程，建立大数的表象。

(3)想一想，1 200张纸大约有多厚？(如果10本书是500张纸，学生可以想象20本书是1 000张纸，1 200张纸比20本书还要厚)请学生描述"这1 200张纸叠在一起有多高"，鼓励学生从不同的角度进行描述。

例4 说出与日常生活密切相关的数及其表示的事物。

[说明] 对小学生来讲，日常生活中用数来表示的例子很多，如学号、班级人数、身高、物价、质量、距离等。教学中要引导学生自己去发现，相互交流，从而体会数的意义和作用。

例5 教室里有6行座位，每行7个，教室里一共有多少个座位？

[说明] 这个例子可以引导学生理解教室中的座位数是6个7的和，可以写成：6×7或7×6。

例6 学校组织987名学生去公园游玩。如果公园的门票每张8元，带8 000元钱够不够？

[说明] 本例的目的是希望学生了解在什么样的情境中需要估算。能结合具体情境，选择适当的单位是第一学段估算的核心。比如，在此例中适当的方法是把987人看成1 000人，所以适当的单位是"1 000人"。

一般来说，估计教室的长度时，通常以"米"为单位；估计书本的长度时，通常以"厘米"为单位。也可以用身边

熟悉的物体的长度为单位，如步长、臂长等。

例7 每条小船限乘4人，18人至少需要租几条船？你认为怎样分配才合适？

例8 估计每分钟脉搏跳动的次数、阅读的字数、跳绳的次数、走路的步数。

［说明］ 本例既可以帮助学生体验1分的长短，又是一个估计问题，需要实际测量，在测量的基础上进行简单计算。

可以用三类方法进行实际测量：测量半分钟，然后用测得的数据乘2；测量1分；测量2分，然后用测得的数据除以2。对于学有余力的学生，可以引导他们感悟第一种方法省事，但可能不够准确；第二种方法费事，但可能更准确一些。帮助学生建立选择策略的思想。

例9 在下列横线上填上合适的数字、字母或图形，并说明理由。

1，1，2；1，1，2；_____，_____，_____；

A，A，B；A，A，B；_____，_____，_____；

□，□，⊟；□，□，⊟；_____，_____，_____。

［说明］ 启发学生探索规律。希望学生感悟：对于有规律性的事物，无论是用数字还是字母或图形都可以反映相同的规律，只是表达形式不同。

例 10 在图 1 中，描出横排和竖排上两个数相加等于 10 的格子，再分别描出相加等于 6，9 的格子，你能发现什么规律？

9									
8									
7									
6									
5									
4									
3									
2									
1									
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 1

［说明］ 本例不仅能帮助学生熟练地进行 20 以内的加法，并且数值与图形结合，有利于学生以后学习坐标系、图象等。

根据学生的实际，借助上面的图 1 可以提出不同的问题。例如，进一步把两个数相加的和是 8 的格子描出来，看一看有什么规律。根据上图判断，出现次数最多的和是几？最少的是几？教师应根据自己学生的实际情况灵活地设计教学。如果学生在观察上图或者发现规律中有困难，教师可以引导学生从简单的情形入手，比如，两个加数先限制在 5 以内。

图形与几何

例 11 如图 2，桌上放着一个茶壶，四位同学从各自的方向进行观察。

图 2

请指出图 3 中四幅图分别是哪位同学看到的。

(　　)　　(　　)　　(　　)　　(　　)

图 3

例 12 1 米约相当于____支铅笔长；北京到南京的铁路线长约 1 000 ____ 。

［说明］ 可以把问题举一反三，让学生了解实际情境中度量单位的意义，学会选择合适的度量单位，增加学生对测量单位的感知。

例 13 测量并计算一张给定正方形纸的面积，利用结果估计课桌面的面积；测量步长，利用步长估计教室的面积。

［说明］ 把测量与面积计算有机地结合，让学生体会面积的实际背景和估计长方形面积的方法。

例 14 在下列现象中，哪些是平移现象？哪些是旋转现象？

(1)汽车方向盘的转动；　　(2)火车车厢的直线运动；

(3)电梯的上下移动；　　(4)钟摆的运动。

例 15 图 4 中哪些图形通过平移可以互相重合？

图 4

例 16 图 5 是一张动物园的示意图，根据图中所标的位置回答下列问题：

(1)熊猫馆在猴山的哪个方向上？

(2)大象馆在海洋馆的哪个方向上？

［说明］ 可以先从一个固定的观测点出发，描述其他物体的方位，再改变观测点，描述与其他物体的相对方位。

图 5

统计与概率

例 17 分别选择三个不同的标准把全班同学分为两类，记录调查结果。

［说明］ 比较、排列、分类等活动是对数据进行初步整理，是学生进行数据分析的开始，也为以后学习统计与概率及其他方面的数学知识积累感性经验。教学中应鼓励学生依据分类标准得出结论，具体可作如下设计：

(1)教师给出问题后，引导学生讨论不同的分类标准。例如，性别、身高、家到学校的距离、出生年月、左右手写字，等等。

(2)当提出的标准较多时，可以分组进行活动，完成调查。

(3)运用自己的方式(文字、图画、表格等)呈现调查结果。

例 18 新年联欢会准备买水果，调查班级同学最喜欢吃的水果，设计购买方案。

[说明] 借助学生身边的例子，体会数据调查、数据分析对于决策的作用。此例可以举一反三。教学中可作如下设计：

(1)全班同学讨论决定购买方案的原则，可以在限定的金额内考虑学生最喜欢吃的一种或几种水果，或者其他的原则。

(2)鼓励学生讨论收集数据的方法。例如，可以采用一个同学提案、赞同举手的方法；可以采用填写调查表的方法；可以采用全部提案后，同学轮流在自己同意的盒里放积木的方法；等等。必须事先约定，每位同学最多可以同意几项。

(3)收集并表示数据，参照事先的约定决定购买水果的方案。

要根据学生讨论的实际情况进行灵活处理，购买方案没有对错之分，但要符合最初制订的原则。

例 19 对全班同学的身高进行调查分析。

[说明] 学校一般每年都要测量学生的身高，这为学习统计提供了很好的数据资源，因此这个问题可以贯穿第一学段和第二学段，根据不同学段的学生特点，要求可以有所不同。希望学生把每年测量身高的数据都保留下来，养成保存资料的习惯。在第一学段，主要让学生感悟可以从数据中得到一些信息。教学中可以作如下设计：

(1)指导学生将全班同学的身高进行汇总。

(2)从汇总后的数据中发现信息。比如，最高(最大

值)、最矮(最小值)、相差多少(极差)，大部分同学的身高是多少(众数)等。在讨论过程中，括号中的有些名词并不需要出现，但是希望学生体会数据所代表的意义。

(3)在整理中，可以让学生尝试创造灵活的方法。例如，寻找最高，可以直接比较寻找，当学生人数比较多时，也可以分组寻找组内最高，然后在每组的最高中寻找最高；在考虑顺序问题时，可以参见例2。

综合与实践

例20　图形分类。

如图6所示，桌上散落着一些扣子，请把这些扣子分类。想一想，应当如何确定分类的标准？根据分类的标准

图6

可以把这些扣子分成几类？然后具体操作，并用文字、图画或表格等方式把结果记录下来。

［说明］ 本活动适合于本学段的各个年级，可以在要求上有所区分。本活动的目的是希望学生能够清楚，分类是要依赖分类标准的，如扣子的形状、扣子的颜色或者扣眼的数量都可以作为分类的标准，而在不同的分类标准下分类的结果可能是不同的。本活动将有利于培养学生把握图形的特征、抽象出多个图形的共性的能力。另一方面，活动还要求学生运用文字、图画或表格等方式记录对扣子进行分类后的结果，这有利于培养学生整理数据的能力。

教师在此活动的教学中可以作如下设计：

(1)教师提出问题，引导学生讨论分类标准。可以启发学生这样思考：先关注一个指标作为分类标准，如先关注颜色；在此基础上，再进一步关注两个指标作为分类标准，如进一步关注颜色和形状；最后再关注颜色、形状和扣眼数。这样可以避免出现混乱。

(2)根据已经讨论确定的分类标准对学生分组，引导学生实际操作，合作完成计数；各小组呈现统计结果。

(3)教师组织学生报告统计结果，引导学生作出评价，帮助学生整理思路。

例 21 生活中的轴对称图形。

组织学生分组收集日常生活中常见的图形（如图标），观察它们是否有对称轴，若有对称轴，数出或说出有几条对称轴。尝试画出它们的对称轴。在课堂中展示交流大家的发现，并尝试设计出一些轴对称图形。

［说明］ 这个活动可以鼓励学生主动观察，设法收集

(如可以使用数码相机或现场素描等)。学生可以结合自己的生活环境发现、找到他们熟悉的图形对象中隐藏的对称轴，并在交流过程中丰富自己的经验，如图7所示。

图7

在交流大家收集到的图形的基础上，教师进一步鼓励学生自己设计轴对称图形，并交流自己图形所表达的意思。

例22 上学时间。

让学生记录自己在一个星期内每天上学途中所需要的时间，并从这些数据中发现有用的信息。

[说明] 这个活动适用于二、三年级，有利于培养学生的数据分析意识：知道在现实生活中，有许多问题可以先调查数据，通过对数据的分析得到结论；如果把记录时间精确到分，可能学生每天上学途中需要的时间是不一样的，可以让学生感悟数据的随机性；更进一步，让学生感悟虽然数据是随机的，但数据较多时具有某种稳定性，可以从中得到很多信息。

教学中可以作如下设计：

(1)指导学生如何测量时间和作记录，启发学生先设计调查方案。例如，事先调整家里钟表的时间，使其和学校钟表的时间保持一致；在调查期间需要保证每天上学途中

的行为尽量一致；作为参照，也可记录放学回家的时间；等等。在此过程中，培养学生认真做事的习惯。

(2)组织学生展示数据，鼓励学生从中发现信息。学生得到的信息可以是多方面的：虽然每天上学途中需要的时间可能是不一样的，但通过一个星期的调查可以知道"大概"需要多少时间；可以知道上学途中所需要的最长时间和最短时间等。

(3)组织学生进行交流，比较自己与他人的调查结果，从而获得更多信息：大多数同学上学途中所需要的时间，同学中最长的和最短的时间；可以将时间分段，统计每个时间段的学生人数，得到表格或者统计图。在此过程中，鼓励学生体会分析调查结果及得到结论的乐趣。

第二学段(4～6年级)

数与代数

例23 如果一个人的寿命是76岁，这个人一生的心跳大约有多少次？光速大约是30万千米/秒，光从太阳到达地球大约需要多长时间？如果把100万张纸叠加起来，会有珠穆朗玛峰那么高吗？

[说明] 参见例3。在计算的过程中，要合理利用数的单位和度量单位来减少位数。有些问题需要学生自己查找资料，如太阳到地球的距离、珠穆朗玛峰的海拔高度，这样的查找资料活动有利于学生养成调查研究的习惯。

例 24 某学校为学生编号，设定末尾用 1 表示男生，用 2 表示女生，例如，200903321 表示“2009 年入学的三班的 32 号同学，该同学是男生”。那么，201004302 表示什么？

［说明］ 这个例子可以启发学生思考，编号提供给我们一些什么信息，比如，一个年级最多有多少个班，一个班最多有多少名学生。可以引导学生设计本学校的学生编号方案。还可以启发学生通过观察学生证的编号估计学校的学生数。

例 25 说明$\frac{1}{4}$，0.25 和 25%的含义。

［说明］ 分数、小数和百分数都是有理数的常用表示方法，但含义是有所不同的。真分数通常表示部分与整体的关系，如全班同学人数的$\frac{1}{4}$；小数通常表示具体的数量，如一支铅笔 0.25 元；百分数是同分母（统一标准）的比值，便于比较，如去年比前年增长 21%，今年比去年增长 25%。希望学生能够理解它们的含义，在生活中能够合理使用。

例 26 李阿姨去商店购物，带了 100 元，她买了两袋面，每袋 30.4 元，又买了一块牛肉，用了 19.4 元，她还想买一条鱼，大一些的每条 25.2 元，小一些的每条 15.8 元。请帮助李阿姨估算一下，她带的钱够不够买小鱼？能不能买大鱼？

［说明］ 本题有两问。第一问“够不够买小鱼”可以这样估算：

买一袋面不超过 31 元，两袋面不超过 62 元；买牛肉不

超过 20 元；买小鱼不超过 16 元；总共不超过 62＋20＋16＝98(元)，李阿姨的钱是够用的。

第二问“能不能买大鱼”可以这样估算：

买一袋面至少要 30 元，两袋面至少要 60 元；买牛肉至少要 19 元；买大鱼至少要 25 元；总共至少要 60＋19＋25＝104(元)，已经超过 100 元了，李阿姨不能再买大鱼了。

这类问题在生活中很常见。从数学上看，第一问要判断 100 元是否超过三种物品的价格总和，适当放大；第二问要判断三种物品的价格总和是否超过 100 元，适当缩小。一般不需要精确计算，只需要估算就可以了。

例 27 9.9×6.9 比 70 小吗？

$\frac{1}{2}+\frac{4}{7}$比 1 大吗？

[说明] 参考例 26。

可以把 9.9 放大为 10，因为 10×6.9＝69，估算结果比 70 小。

可以把$\frac{4}{7}$缩小为$\frac{1}{2}$，估算$\frac{1}{2}+\frac{4}{7}$比$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$大。

例 28 利用计算器计算 15×15，25×25，…，95×95，并探索规律。

[说明] 目的是运用计算器进行计算，从中发现一些有趣的规律。学生可以通过观察结果与乘数的关系，发现规律。例如，

15×15＝225＝1×2×100＋25，

25×25＝625＝2×3×100＋25，

35×35＝1 225＝3×4×100＋25，

等等。这个规律在实际运算中也是有用的。

例 29 彩带每米售价 3.2 元，购买 2 米，3 米，……，10 米彩带分别需要多少元？在方格纸上把与数对(长度，价钱)相对应的点描出，并且回答下列问题：

(1)所描的点是否在一条直线上？

(2)估计一下，买 1.5 米的彩带大约要花多少元？

(3)小刚买的彩带长度是小红的 3 倍，他所花的钱是小红的几倍？

[说明] 希望学生感受成正比例关系的一组数对所对应的点在一条直线上，并且能够借助图形进行数据的估计。

教学中引导学生在描点之前，先建立下面的表格，有利于直观地理解正比例关系，并为描点作准备。

长度/米	0	1	2	3	4	5	6	7	…
价钱/元	0	3.2	6.4	9.6	12.8	16	19.2	22.4	…

例 30 联欢会上，小明按照 3 个红气球、2 个黄气球、1 个绿气球的顺序把气球串起来装饰教室。你知道第 16 个气球是什么颜色吗？

[说明] 希望学生能够通过所给条件，发现规律，进一步了解规律可以借助各种符号表示(参见例 9)。

在解决这个问题时，学生可以有多种方法。例如，用 A 表示红气球，B 表示黄气球，C 表示绿气球，则按照题意气球的排列顺序可以写成

AAABBCAAABBC…

从中找出第 16 个字母，由此推出第 16 个气球的颜色。

例 31 一个房间里有 4 条腿的椅子和 3 条腿的凳子共 16 个，如果椅子腿数和凳子腿数加起来共有 60 条，那么有几个椅子和几个凳子？

［说明］ 可以引导学生运用尝试的办法探索规律，得出结果，使学生感受这是数学探索的一种有效途径。比如，可以有规律地给出下面的计算过程：

椅子数/个	凳子数/个	腿的总数/条
16	0	4×16＝64
15	1	4×15＋3×1＝63
14	2	4×14＋3×2＝62

继续计算下去，可以得到椅子数为 12、凳子数为 4 时，腿数恰好为 60。通过上表可以启发学生思考：每减少 1 个椅子就要增加 1 个凳子，腿的总数就要减少 4－3＝1。腿的总数为 60 时，需要减少的椅子数是 64－60＝4，于是椅子数是 16－4－12，凳子数是 0＋4－4。最后验证一下：4×12＋3×4＝60，是正确的。当然，也可以从凳子数的变化思考：每减少 1 个凳子就要增加 1 个椅子，腿的总数就要增加 4－3－1。

对于学有余力的学生，教师可以鼓励他们讨论“鸡兔同笼”问题，还可以进一步用字母代替椅子数与凳子数，得到计算腿的总数的模型。

图形与几何

例 32 观察图 8。

图 8

请在图 9 中指出从前面、右面、上面看到的相应图形。

（　）　　（　）　　（　）

图 9

［说明］ 可以为学生提供实物，让学生进行实际观察。观察之前也可以先说一说自己的想法，再实际验证。

例 33 图 10 中每个小正方形为 1 个面积单位，试估计曲线所围图形的面积。

图 10

［说明］ 要帮助学生养成事先做好规划的习惯。可以运用不同的方法估计图形的面积，例如：

方法 1，可以数出图形内包含的完整小正方形数，估计这个图形的面积。

方法 2，在上面的基础上，再加上图形边缘接触到的所有小正方形数，估计这个图形的面积。

可以引导学生发现，第一种方法估计的比实际面积小，第二种方法估计的比实际面积大。实际面积应在这两个估计值之间。

在此基础上还可以引导学生用自己的方法进行估计，学生通过记录、计算、比较等，体会估计的意义和方法。

对于学有余力的学生，可以引导他们将所有的小正方形等分成更小的正方形，探索更接近实际面积的估计值。

例 34 测量一个土豆的体积。

［说明］ 对于不规则物体的体积的测量问题，可以转化为等体积的规则物体来测量。例如，准备一个有刻度的容器，先注入一些水，然后把土豆放入水中，观察水面高度上升的情况。类似地，可以利用学生熟悉的“曹冲称象”的故事，让学生体会等量替换的思想方法。

例 35 图画还原。

打乱由几块积木或者几幅图画构成的平面画面，请学生还原，并利用平移和旋转记录还原步骤。

［说明］ 通过实际操作进一步理解平移和旋转，不仅能增加问题的趣味性，还可以让学生感悟几何运动也是可以记录的，体验选取最佳方案的过程。

教学设计时，可关注如下要点：

(1)完成还原积木的任务一定要从简单到复杂，如图11，先打乱四块积木中的下面两块，让学生尝试思考的过程。学生有了一定经验后，可以打乱三块或四块积木，让学生继续尝试。

图 11

(2)可以分小组进行。为了记录准确，事先要确定每一个步骤的代表符号。

(3)小组活动时，可以先讨论，确定一个大概的还原路线，然后操作验证。

(4)小组成员共同操作，进行比较，验证确定的路线。

例 36 描述从学校到家的路线示意图，并注明方向及途中的主要参照物。

[说明] 学生可以用语言描述路线，为了交流的方便，学生也可以借助实物模拟路线。教师还可以进一步鼓励学生画出路线的简单示意图，并在图中标明方向及主要参照物。

例 37 小青坐在教室的第 3 行第 4 列，请用数对表示，并在方格纸上描出来。在同样的规则下，小明坐在教室的

第 1 行第 3 列应当怎样表示？

［说明］ 需要先在方格纸上标明正整数刻度，希望学生能够把握数对与方格纸上点(行列或者列行)的对应关系，并且知道不同的数对之间可以进行比较。这个过程有利于学生将来直观理解直角坐标系。

统计与概率

例 38 对全班同学身高的数据进行整理和分析。

［说明］ 在例 19 中，已经引导学生对全班同学身高的数据进行了初步分析。在这个学段中，要求学生结合以前积累的身高数据(参见例 19 的说明)，进行进一步的整理，然后进行分析。整理的目的是为了便于分析，例如，条形统计图有利于直观了解不同高度的学生数及其差异；扇形统计图有利于直观了解不同高度的学生占全班学生的比例及其差异；折线统计图有利于直观了解几年来学生身高变化的情况，预测未来身高变化趋势。学生还可以讨论用什么数据来代表全班同学的身高，自己的身高在全班的什么位置。

教学设计时，可以关注如下要点：

(1)组织学生讨论并明确画统计图的基本标准。如果学生意见不一致，可以根据意见的不同把学生分组，各自画出统计图后进行比较。

(2)可以根据几年来全班同学平均身高的数据画出折线统计图，让学生与自己身高数据的折线图进行分析比较。还可以对男女生的身高数据进行分析和比较。

(3)组织学生讨论用什么数据来代表全班同学的身高，

自己的身高在全班的什么位置。学生可以用平均身高作为代表，用自己的身高与平均身高进行比较；可以用出现次数最多的身高作为代表（“众数”的意义），用自己的身高与其相比；也可以用班级中等水平学生的身高作为代表（“中位数”的意义），用自己的身高与其相比。学生只要能说出自己的理由就可以，不需要出现“众数”“中位数”等名词（只要求教师理解，不要求给学生讲解）。

（4）虽然数据整理和分析的方法可以有所不同，但要求分析的结论清晰，能够更好地反映实际背景。

例 39 阅读在报纸或者杂志上发表的有统计图的文章，用自己的语言说明统计图所表达的意思。

［说明］ 在实际背景中体会统计图的作用，可以增强趣味性，加深对统计图及其所表示的问题的理解。此外，还可以培养学生调查研究的习惯。

教学时，教师可以事先布置作业，也可以确定题目分小组查阅资料，小组讨论后再课堂分小组交流。在此基础上，还可以调查周边的事情（如喜欢读的书籍、喜欢听的歌曲，等等），得到数据并画出统计图进行分析。

例 40 袋中装有 4 个红球和 1 个白球。只告诉学生袋中球的颜色为红色和白色，不告诉他们红球数目与白球数目，让学生通过多次有放回的摸球，统计摸出红球和白球的数量及各自所占比例，由此估计袋中红球和白球数目的情况。

［说明］ 借助学生感兴趣的摸球游戏，使学生体会到数据的随机性。一方面，每次摸出的球的颜色可能是不一

样的，事先无法确定；另一方面，有放回重复摸多次(摸完后将球放回袋中，摇晃均匀后再摸)，就能发现一些规律。根据学生的不同学段，可以设计如下层次：

(1)适合于第二学段。通过摸球，学生发现每次摸出的球的颜色不确定，初步感受数据的随机性。进一步通过统计摸出红球和白球的数量，可以估计袋中是白球多还是红球多。在不确定的基础上，体会规律性。

(2)适合于第三学段。在(1)的基础上，学生可以估计袋中白球数量和红球数量的比，进一步体会规律性。教师可以进一步鼓励学生思考：若给出袋中两种颜色球的总数，如何估计白球和红球各自的数量？

教学时，教师可以先鼓励学生思考，在不打开袋子的前提下，如何估计袋中红球和白球数量的情况，启发学生想到可以通过摸球得到数据，由数据进行估计。然后，教师组织大家进行摸球活动，在摸球的过程中提醒摸球的规则：有放回，尽可能摇匀，并指导学生记录下每次摸到的颜色。为了保证试验次数，全班可以分小组进行试验，然后将所有小组的试验数据汇总。通过统计和比较摸到的红球和白球的数量，对袋中球的情况进行估计。

实际上，如果袋中装有4个红球和1个白球，可以知道摸到红球的概率为$\frac{4}{5}$(也就是$\frac{8}{10}$)。通过摸球试验，可以用红球出现的频率来估计概率，显然，摸球的次数越多，估计的精度越高。一般情况下，摸球的次数与估计的精度之间的关系是什么呢？通过计算可以得到：保证有80%以上的可能使得“摸到红球的频率在$\frac{7}{10}$到$\frac{9}{10}$之间”，需要摸27次

以上，保证有95%以上的可能使得“摸到红球的频率在$\frac{7}{10}$到$\frac{9}{10}$之间”，需要摸60次以上。教师不必会推导这个结论，但知道这个结论，可以使教师更好地理解运用数据进行估计的内涵并进行有效操作，知道通过摸球的数据进行推测并不是毫无道理的“瞎碰”，而是有数学理论保证的。

例41 将下面这些卡片混在一起，从中任意选取一张卡片，这张卡片可能是什么？

图12

［说明］ 希望学生理解，因为是任意选取一张卡片，所以每张卡片都可能被选取，但事先无法确定哪张卡片一定会被选取（是随机的），每张卡片被选取的可能性是一样大的（简单事件）。

如果学生能够很好地理解，则可以进一步提问：这张卡片是船的可能性大，还是房子或者车的可能性大呢？可以让学生进行实际操作。

综合与实践

例 42　绘制校园平面图。

按照确定的比例和方位，绘制校园的平面图，包括围墙、主要建筑、主要活动场所、道路等。

[说明]　本活动适用于五、六年级，目的是通过实际操作，让学生更好地理解位置、方向和比例等基础知识，掌握测量的方法。因为整个操作比较复杂，建议采用小组活动的形式，这样做既有利于培养学生统筹规划的实践能力，也有利于学生体验团结协作、获得成功的快乐。

教学设计时，可以关注如下要点：

(1)选择测量工具。最简单的测量工具是指南针和皮尺(也可用步长近似测量)。

(2)在教师的指导下，各小组讨论并形成基本测量方案，组内分工。小组完成实际测量后，绘制校园平面图。

(3)交流。各小组展示本组绘制的校园平面图，交流绘制的方法和过程(可以用壁报、幻灯等形式)。

例 43　旅游计划。

某人计划用 5 天的时间外出旅游，所需费用大概是多少？

[说明]　适用于本学段的各个年级，要求可以不同。关于目的地和时间，教师可以根据实际情况提出。这个问题需要学生自己调查研究，认真制订计划，根据计划计算费用。因此，这是一个灵活的开放问题。为了便于调整计划，可以先考虑几种方案，然后比较、筛选；也可以分小

组活动，分工调查、集体讨论后制订一个统一的计划。

在学生报告结果时，教师应要求学生能对自己和别人的方案进行评价。

例 44　象征性长跑。

为了迎接奥运会的召开，某小学决定组织“迎接圣火、跑向北京”的象征性长跑活动，学校向同学们征集活动方案，请你参与设计，其中要解决的问题有：

(1)调查你所在的学校到北京天安门的距离约有多少千米？

(2)如果一个人每天跑一个“马拉松”，那么几天能完成这项长跑？

(3)如果全班用接力方式开展这项活动，请你设计一个合理的活动方案。

(4)全班交流、展出同学们的不同方案，说明各个方案的特点，同学之间评价方案的优缺点，推荐本班的最佳活动方案。

［说明］　适用于本学段的各个年级，要求可以不同。可以分小组活动，分工调查关键数据(如调查学校到北京的距离，如果是北京的学校就要改变长跑的目的地，比如可以把目的地改为延安)，学生分组集体讨论后，可以制订一个计划，自主提出适合自己班级特点的“长跑方案”，比如，可以给男、女生提出不同的日跑量，提出哪一天跑到“中途某一个城市”，等等。因此，这是一个灵活的开放问题。教师可以组织学生交流不同方案，同学之间评价不同方案的优缺点，推荐本班的最佳活动方案，丰富学生的活动体验。

例 45　估计高度。

珠穆朗玛峰有多高？北京电视塔有多高？它们的高度分别相当于几个教室的高度，或相当于多少个学生手拉手的长度？还可以用哪些你熟悉的事例来形象地描述这些高度？

［说明］ 本例引导学生用自己熟悉的数量作为单位描述实际问题中较大的数量，有助于学生感知和认识大数，进一步发展数感。

这个活动所采用的数据，可以是人们较为熟悉的（如珠穆朗玛峰的高度），也可以通过咨询、查阅资料获得（如北京电视塔的高度）。开展活动时，应当注重根据本地区、本校的实际，从学生身边的事物中选取素材和数据。

例 46　分类计数。

将图 13 中边长为 3 和 4 的两个正方体的表面刷上红色的漆，再将其分割成边长为 1 的小正方体。探求满足下面条件的小正方体的数量规律。

图 13

(1)边长为 3 的正方体中，三面、两面、一面有红色的

小正方体各有多少个？

(2)边长为4的正方体中，三面、两面、一面有红色的小正方体各有多少个？

(3)将正方体的边长分别改为5和6，结果如何？

(4)分析上面三个问题的求解过程，你能发现什么规律？

[说明] 本活动可以帮助学生积累由特殊到一般、寻找规律的数学经验，同时有利于培养学生的空间想象力。在逐渐深入的探讨过程中，要引导学生把握问题的共性，从而得到一般性的结论。在活动的过程中，教师应鼓励学生由特例提出新问题，推动思考的深入，并归纳一般规律。鼓励学生用自己的语言和数学语言正确地表达他们发现的规律。教师可以根据学生的实际情况，对于解决问题有困难的学生给予指导、帮助；对于学有余力的学生，还可以引导他们进一步提出问题，如，没有涂红色的小正方体的个数是多少？

第三学段(7～9年级)

数与代数

例47 估计$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与0.5比哪个大？与1.0比呢？

例48 计算：(1)$\sqrt{12}+\sqrt{8}\times\sqrt{6}$；(2)$\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}$。

[说明] 运用二次根式的加、减、乘、除运算法则进

行二次根式的四则运算，根号下仅限于数，不要求进行根号下含字母的二次根式的四则运算，如$\sqrt{a^3b}$，$2\sqrt{a}\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{a}}$等。

例 49　结合实例解释 $3a$。

［说明］　希望学生理解用字母表示的代数式是有一般意义的。a 可以表示数量，如葡萄的价格是 3 元/千克，则 $3a$ 表示买 a 千克的金额；a 可以表示长度，如一个等边三角形的边长为 a，则 $3a$ 表示这个三角形的周长；等等。

例 50　利用公式证明例 28 所发现的运算规律。

［说明］　在第二学段的学习中已经发现了如下的运算规律：

$$15\times15=1\times2\times100+25=225,$$
$$25\times25=2\times3\times100+25=625,$$
$$35\times35=3\times4\times100+25=1\ 225。$$

观察后，我们猜测：若用字母 a 代表一个正整数，则有规律

$$(a\times10+5)^2=a(a+1)\times100+25。$$

但这样的猜测是正确的吗？需要给出证明：

$$(a\times10+5)^2=a^2\times100+2a\times10\times5+25=a(a+1)\times100+25。$$

这是一个由具体数值计算到符号公式表达的过程，即由特殊到一般的过程。可以让学生感悟，有些问题是可以通过一般性的证明来验证自己所发现的规律，感悟数学的严谨性，增加学习数学的兴趣。

例 51 一个房间里有 4 条腿的椅子和 3 条腿的凳子共 16 个，如果椅子腿数和凳子腿数加起来共有 60 条，那么有几个椅子和几个凳子？

［说明］ 这个问题与例 31 是相同的。事实上，这个问题可以用三种方法建立模型。在第二学段讨论过的方法是基于四则运算，还可以用一元一次方程的方法或二元一次方程组的方法解决。启发学生从不同的角度思考同一个问题，有利于学生进行比较，加深对于模型的理解。

利用一元一次方程解决此问题时，可以引导学生通过具体列表的方式找出规律、建立方程，这样有利于学生理解方程的意义，体会建模的过程。假设椅子数为 a，则凳子数为 $16-a$，把例 31 中的表移过来并用字母代替：

椅子数/个	凳子数/个	腿的总数/条
$a=16$	$16-a=0$	$4a+3(16-a)=64$
$a=15$	$16-a=1$	$4a+3(16-a)=63$
$a=14$	$16-a=2$	$4a+3(16-a)=62$

这样，合题意的方程为 $4a+3(16-a)=60$，可以通过尝试的方法，解得 $a=12$，也可以解方程求解。

利用二元一次方程组可以直接列方程。假设椅子数为 a，凳子数为 b，可以得到两个方程 $a+b=16$ 和 $4a+3b=60$，用代入法得到 $4a+3(16-a)=60$，求解得到 $a=12$ 和 $b=4$。

从上面的讨论可以看到，用四则运算方法，思考最困难，但是结果最直接；用二元一次方程组的方法，思考最简洁，但是计算较烦琐。

在教学过程中，可以结合具体的教学内容使用这个例子，最后进行比较，启发学生思考。

例 52 估计方程 $x^2+2x-10=0$ 的解。

［说明］ 估计方程的解，不仅仅在于求解，也有利于学生直观地探究方程的性质，初步感悟通过代入数值进行计算也是求方程解的有效途径。一般来说，如果把一个数代入方程左边得到的值为负，把另一个数代入得到的值为正，则在这两个数之间可能有方程的解。根据这个原理，用二分法可以估计方程的解。

分析这个一元二次方程，当 x 的绝对值较大时，方程的左边必然为正，如 -5 和 3；当 x 的绝对值较小时，方程的左边必然为负，如 2。因此，在 -5 和 2 之间，以及在 2 和 3 之间方程可能有解。进一步，可以将解的范围缩小，使我们估计的解尽可能精确，如选 -5 和 2 的中间值 -1.5 代入方程的左边进行计算，如果得到的值为正，则在 -1.5 和 2 之间有解，否则在 -5 和 -1.5 之间有解。可以借助计算器来完成上述的计算过程。

再进一步，教师引导学生用公式法解出方程的解，然后借助计算器求解的近似值，并将得出的近似值与前面的估计值进行比较。

例 53 小丽去文具店买铅笔和橡皮。铅笔每支 0.5 元，橡皮每块 0.4 元。小丽带了 2 元钱，能买几支铅笔、几块橡皮？

［说明］ 对于初中生，这个问题是生活常识，但希望学生能通过这个例子学会用数学的思维方式看待生活中的问题。

这是一个求整数解的不等式问题，并且问题是开放的，通过列表具体计算，有助于学生直观理解不等式。

假设买 a 支铅笔、b 块橡皮，可以得到不等式

$$0.5a + 0.4b \leqslant 2。$$

当 $a = 1$ 时，计算得到 $b \leqslant \frac{2-0.5}{0.4} = 3.75$，则 $b = 3$。这样计算，可以建立下面的表格：

a/支	0	1	2	3	4
b/块	5	3	2	1	0
余额/元	2.0	1.7	1.8	1.9	2.0

根据上面的表格，小丽可以选择适当的购买方案。

例 54 小明的父母出去散步，从家走了 20 分到一个离家 900 米的报亭，母亲随即按原速度返回。父亲在报亭看了 10 分报纸后，用 15 分返回家。图 14 中哪一个表示父亲离家后距离与时间之间的关系？哪一个表示母亲离家后距离与时间之间的关系？

图 14

例 55 某书定价 8 元。如果一次购买 10 本以上，超过 10 本部分打八折。分析并表示购书数量与付款金额之间的函数关系。

[说明] 这是一个分段函数，函数的三种表示法均适用于这个例子。一般来说，列表法适用于变量取值是离散的情况。分段函数应当画图，并且关注分段点处函数的变化情况。

可以分组讨论三种方法，然后让学生分析比较。

例 56 甲、乙两地相距 20 千米。小明上午 8：30 骑自行车由甲地去乙地，平均车速为 8 千米/时；小丽上午 10：00坐公共汽车也由甲地去乙地，平均车速为 40 千米/时。分别表示两个人所用时间与距离的函数关系，并回答谁先到达乙地。

[说明] 问题的要点是同时分析两个函数关系。可以启发学生用各种方法来解答第二个问题，在分析、总结学生的解答时，可以把两个函数的图象放在一起进行直观比较。

例 57 温度的计量。

世界上大部分国家都使用摄氏温度(℃)，但美国、英国等国家的天气预报仍然使用华氏温度(℉)。两种计量之间有如下对应：

摄氏温度/℃	0	10	20	30	40	50
华氏温度/℉	32	50	68	86	104	122

(1)在平面直角坐标系中描出相应的点，观察这些点是否在一条直线上。

(2)如果两种计量之间的关系是一次函数，请给出该一次函数表达式。

(3)求出华氏0度时摄氏是多少度。

(4)华氏温度的值与对应的摄氏温度的值有相等的可能吗？

［说明］ 在表中，两个变量对应数值的差之比是一个常数，所以两个变量之间是一次函数关系。摄氏温度从0度开始，设为横坐标方便。但在求华氏0度对应的摄氏温度时，需要通过函数值来反求自变量的值。在平面直角坐标系中，该一次函数的图象与直线 $y=x$ 的交点处的值就是华氏温度的值与摄氏温度的值相等时的值。

图形与几何

例58 从一个侧面为正方形的长方体实物中抽象出长方体、长方形、正方形、线段和顶点。

［说明］ 学生在日常生活中见到的物体都是立体的，而在纸上画出的图形都是平面的，这是一类很重要的抽象。特别是把物体表面分解，有利于培养学生的空间观念。

例59 证明：两直线平行，同位角相等。

［说明］ 考虑到学生的实际情况，在教学过程中，给出下面证明方法的时间可以酌情处理。

这个证明可以利用反证法完成，一方面，使学生了解结论的证明；另一方面，可以帮助学生了解反证法。如图

15 所示，我们希望证明，如果 $AB /\!/ CD$，那么 $\angle 1=\angle 2$。假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，过点 O 作直线 $A'B'$，使 $\angle EOB'=\angle 2$。根据"两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行"这个基本事实，可得 $A'B' /\!/ CD$。这样，过点 O 就有两条直线 AB，$A'B'$ 平行于 CD，这与基本事实"过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行"矛盾，说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设是不对的，于是有 $\angle 1=\angle 2$。

图 15

例 60 直观阐述基本事实：两边及其夹角分别相等的两个三角形全等。

[说明] 虽然基本事实是不需要证明的，但是可以启发学生进行直观分析，探索结论的合理性。

图 16-1

图 16-2

如图 16-1 所示，一个三角形由六个元素构成，即三条边和三个角，因此，若两个三角形三条边和三个角分别相等，则这两个三角形全等。问题是，最少几个元素就可以确定三角形从而构成全等条件呢？

观察图 16-1 中的 $\triangle ABC$，如果对图中的边 BC"视而不

见”，这样，对$\angle B$和$\angle C$也就“视而不见”了(如图 16-2)，此时$\triangle ABC$的形状和大小并不改变。这就是说，AB，AC两条边及它们的夹角确定了$\triangle ABC$的形状和大小，于是可以推断，两边以及这两边的夹角可以确定一个三角形。因此，可以认同“两边及其夹角分别相等的两个三角形全等”这个基本事实。

另外，也可以用图形运动(叠合)的方法确认“两边及其夹角分别相等的两个三角形全等”这个结论。

对于基本事实“两角及其夹边分别相等的两个三角形全等”的直观分析可以借助下面的图 17-1 和图 17-2。

图 17-1

图 17-2

可以进一步引导学生思考：为什么“三个角分别相等的两个三角形全等”不能成为基本事实？

对于以上事实的认可，也可以从六个元素中的一个出发，即由少到多进行考虑，通过画图探索出需要几个元素即可确定一个三角形。

例 61 根据性质对平行四边形、矩形、菱形、正方形分类。

[说明] 在第一和第二学段都讨论过分类的问题，通过分类有助于学生把握问题本质，了解研究对象的共性与

差异，分类是探索数学研究对象性质的有效途径。特别是对于几何图形分类，有利于培养几何直观性和思维的层次性。

分类的关键在于确定分类的标准，在不同的标准下可能会有不同的分类结果。一般来说，分类标准可以由粗到细，即由一个特征发展到多个特征(参见例 20)。在本问题中，四边形的分类标准可以考虑为：两组对边平行；两组对边平行且有一个角为直角；两组对边平行且四条边相等；两组对边平行、有一个角为直角、四条边相等。还可以通过对角线建立分类标准，等等。在具体教学过程中，可以启发学生想象，也可以做出实物让学生操作。

例 62 探索并了解：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等。

[说明] 通过探索和了解此结论的证明，帮助学生体验发现结论到验证结论的过程。

教学中可以参考安排如下的过程：

(1)发现结论。在透明纸上画出如图 18-1 的图：设 PA，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，A，B 是切点。让学生操作：沿直线 OP 将图形对折，启发学生思考，或者组织学生交流。学生可以发现：

$$PA=PB,\ \angle APO=\angle BPO。$$

图 18-1

图 18-2

这是通过实例发现图形性质的过程。启发学生由特殊到一般，通过合情推理推测出切线长定理的结论。

(2)证明结论的正确性。如图 18-2，连接 OA 和 OB。因为 PA 和 PB 是⊙O 的切线，所以$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$，即$\triangle POA$ 和$\triangle POB$ 均为直角三角形。又因为 $OA=OB$ 和 $OP=OP$，所以$\triangle POA$ 和$\triangle POB$ 全等。于是有

$$PA=PB,\ \angle APO=\angle BPO.$$

这是通过演绎推理证明图形性质的过程。

由此可见，合情推理与演绎推理是相辅相成的两种推理形式，都是研究图形性质的有效工具。

上述证明过程没有采用形式化的三段论，但有利于初学者把握证明的条理和说理的逻辑。

例 63 如果四边形 $ABCD$ 和 $BEFC$ 都是平行四边形，则四边形 $AEFD$ 也是平行四边形。某同学根据下述图形对这个命题给出了证明。

图 19

证明：因为 $ABCD$ 是平行四边形，

所以 $AD=BC$， ①

$AB=CD$。 ②

又因为 $BEFC$ 也是平行四边形，

所以 $BC=EF$， ③

$BE=CF$。　　④

由①③得　$AD=EF$。　　⑤

由②④得　$AB+BE=DC+CF$。　⑥

因为⑤⑥成立，所以四边形 $AEFD$ 是平行四边形。

他的考虑全面吗？

［说明］ 引导学生判断上述证明过程是否正确，希望学生通过错误的实例，感悟特殊和一般的关系。

例 64 图 20-2 中的三个三角形是由图 20-1 中的三角形经过平移、旋转和轴对称得到的，分别指出图形运动的形式，并标出对应的角。

图 20-1

图 20-2

［说明］ 把运动后的结果归纳在一起让学生辨认，有利于学生理解三种图形运动形式的不同之处，从而把握平移、旋转和轴对称的基本特征，体验图形运动是研究图形的有力工具。

例 65 在直角坐标系中描出下列各点，将各组的点顺次连接起来。观察这个图形，你觉得像什么？

(1)(2，0)，(4，0)，(6，2)，(6，6)，(5，8)，(4，6)，(2，6)，(1，8)，(0，6)，(0，2)，(2，0)；

(2)(1，3)，(2，2)，(4，2)，(5，3)；

(3)(1，4)，(2，4)，(2，5)，(1，5)，(1，4)；

(4)(4，4)，(5，4)，(5，5)，(4，5)，(4，4)；

(5)(3，3)。

［说明］ 在第二学段已经学习了利用方格纸画直角坐标系，理解整数坐标与格子点的对应关系(参见例 37)。在本学段将学习一般的直角坐标系。利用直角坐标系可以把数与图形有机地结合起来，有利于用代数方法研究几何问题，也有利于借助图形直观地探索数量关系的规律性。

这个问题可以进一步扩展：把家乡的地图放在直角坐标系的第一象限内，然后等间隔地画出与坐标轴平行的两组平行线，一边用数字表示，一边用字母表示，然后让学生寻找自己熟悉的地点，并用数字和字母表示出该点。让学生理解，坐标的表示可以是多样的，坐标的核心是对应关系而不是具体表示形式。

例 66 如何用方向和距离描述图 21 中小红家相对于学校的位置？反过来，学校相对于小红家的位置怎样描述呢？

图 21

统计与概率

例 67 设计调查方法。

了解本年级的同学是否喜欢某电视剧。调查的结果适用于学校的全体同学吗？适用于全地区的电视观众吗？如果不适用，应当如何改进调查方法？

［说明］ 对于许多问题，不可能、有时也不必要得到与问题有关的所有数据，只要得到一部分数据（样本）就可以对总体的情况进行估计。很显然，如果得到的样本能够客观地反映问题，则估计就会准确一些，否则估计就会差一些。因此，我们希望寻找一个好的抽取样本的方法，使得样本能够客观地反映问题。在本学段，主要学习简单随机抽样方法，这是收集数据中通用的方法，在一般情况下，我们都假定样本是通过随机的方法得到的。

因为同一个年级的学生差异不大，采用简单随机抽样方法比较合适。可以在上学时在学校门口随机问讯，也可以按学号随机问讯。为了分析方便，需要把问题数字化，如喜欢这部电视剧的记为 1，不喜欢的记为 0。

对于这样的问题，问讯学生数不能少于 20 人，取 40～50 人比较合适，取更多的学生当然更好，但需要花费更多的精力。由此可见，一个好的抽样方法不仅希望“精度高”，还希望“花费少”。

假设问讯的学生数为 n，记录数据的和为 m（显然，m 为喜欢这部电视剧的人数），则调查结果说明，学生中喜欢这部电视剧的比例为$\frac{m}{n}$。我们依此估计本年级的同学中喜欢这部电视剧的比例。

用这个数据估计全地区的电视观众喜欢这部电视剧的比例是不合适的，因为学生、成年人、老年人喜欢的电视剧往往不同。为了对全地区的电视观众喜欢这部电视剧的情况进行估计，可以采用分层抽样方法，比如，依据年龄分层，需要知道各年龄段人口的比例，按照比例数分配样本数，而在各个层内则采取随机抽样；或者依据职业分层，等等。教师应该了解分层抽样，在本学段学生只需学习简单随机抽样方法。

例 68 某个公司有 15 名工作人员，他们的月工资情况如下表。计算该公司月工资的平均数、中位数和众数，并分别解释结果的实际意义。

职务	经理	副经理	职员
人数	1	2	12
月工资/元	5 000	2 000	800

［说明］ 平均数、中位数和众数都是刻画数据集中趋势的方法，因为方法不同，得到的结论也可能不同。很难说哪一种方法是对的，哪一种方法是错的，我们只能说，能够更客观地反映实际背景的方法要更好一些。在这组数据中有差异较大的数据，这会导致平均数较大，因此，用中位数或众数要比用平均数更客观一些。

不难计算出该公司月工资的中位数和众数均为 800 元。而

月工资的平均数＝加权平均(可以看成是加权平均)

$$= 5\ 000\times\frac{1}{15}+2\ 000\times\frac{2}{15}+800\times\frac{12}{15}$$

$$= 1\ 240(\text{元})。$$

因此，加权平均往往就是总体平均，其中的权是数据对应的比例。

例 69　如果还有一个公司也有 15 名工作人员，他们的月工资情况如下表。参照例 68，比较两个公司的月工资状况。

职务	经理	副经理	职员
人数	1	2	12
月工资/元	3 000	1 800	1 000

［说明］　容易计算，这个公司的月平均工资也是1 240元。但是两个公司月工资的方差相差很大，通过计算可以得到：例 68 中数据的方差为 1 174 400，本例中数据的方差为 294 400，前者约为后者的 4 倍。可以让学生知道，进一步学习“统计与概率”，将会得到“两个方差有非常显著的差异”的结论。

例 70　比较自己班级与别的班级同学的身高状况。

［说明］　对于两个班级学生身高状况比较，通常可以通过平均值来判断，但有时候仅仅通过平均数是不够的，如果一个班同学之间身高差异很大，而另一个班同学之间身高差异很小，即使前一个班的平均值高一些，也不能说这个班的整体状况很好。因此，在判断身高状况时，不仅要看平均值，还需要参考方差。

进一步，可以引导学生逐渐深入地进行数据分析，可以要求学生把身高分段，画出频数直方图，并引导学生讨论，通过直方图是否能得到更多的信息。

例 71 下表给出了我国 1992～2004 年国内生产总值(GDP)。在直角坐标系上描出坐标(年，GDP)，并试用直线表示发展趋势。

1992～2004 年中国 GDP 变化表(单位：亿元)

年份	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
GDP	23 938	34 634	46 759	58 478	67 885	74 463	78 345
年份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	
GDP	82 067	89 468	97 315	105 172	117 390	136 876	

[说明] 在现实生活中，有许多数据是与时间有关的，因此这些数据会呈现发展趋势。学生应当能够理解报刊书籍中的这类数据的表达，包括表格、描点、折线图、趋势图等，并且尝试自己表达分析。

图 22

对于上述数据，学生应当会描点，虽然这时直角坐标系的度量单位与书本上教的是不一样的，但是只要刻度之间的比例关系一致，表达就是合理的，让学生感悟到：对于实际问题往往需要具体问题具体分析，而不能单纯地套用书本上学到的知识。因为描点呈现线性增长趋势，可以进一步引导学生利用直线来表示这种趋势，预测未来经济发展，感悟一些随机现象的规律性。

对于"用直线表示发展趋势"的问题，原则上可以画出很多条直线，教师可以引导学生思考和讨论如何画出合适的直线、如何制订"合适直线"的标准，并且告诉学生，在高中阶段"统计与概率"的学习中将会解决这个问题，引发学生的学习兴趣。

这个例子可以举一反三，不一定局限与时间有关的数据，比如，学生身高与体重的关系，同一种树的树叶长与宽的关系(参见例 78)。也可以组织学生查阅资料，探究进出口总量与 GDP 的关系，人均收入与 GDP 的关系，等等。

例 72 将下面这些卡片混在一起，从中任意选取一张卡片，这张卡片是船的概率是多少？是车的呢？

图 23

［说明］ 这是例 41 的继续。学生已经能够理解，任意选取一张卡片，这张卡片是船的可能性比是车的可能性大，现在应当明确地知道其概率分别是$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$。

这个例子可以举一反三，如转动转盘，当转盘停止时指针指向某一特定部分的概率；一个袋子里有几种颜色、数量不同的球，随机摸出某种颜色球的概率，等等。

例 73 分析掷两个骰子点数之和的可能性的大小。

［说明］ 这个问题看起来很难，无从下手。事实上，这也是简单事件的问题，利用例 10 的图，可以得到结论：对应的格子越多可能性越大。比如，点子之和为 7 的可能性最大，为 2 或者 12 的可能性最小。

综合与实践

例 74 直觉的误导。

有一张 8 cm×8 cm 的正方形纸片，面积是 64 cm²。把这张纸片按图 24-1 所示剪开，把剪出的 4 个小块按图24-2 所示重新拼合，这样就得到了一个长为 13 cm，宽为5 cm的长方形，面积是 65 cm²。这是可能的吗？

图 24-1

图 24-2

［说明］ 这是一个直觉与逻辑不符的例子，希望学生通过学习体会到：对于数学的结论，完全凭借直觉判断是不行的，还需要通过演绎推理来验证。

一般来说，学生应当不会相信图 24-2 中纸片的面积是 65 cm^2，但又无法说明为什么观察的结果是错误的。进一步引导学生思考，如果观察是错误的，那么错误可能出在哪里呢？学生通过逻辑思考，可以推断只有一个可能：图 24-2 中纸片所示图形不是长方形，因此不能用长方形的面积计算公式来计算面积。然后，可以引导学生实际测量图形左上角或者右下角，发现确实不像是直角。可以告诉学生，这个想法是正确的，但最好能够给出证明，引导学生经历一个由合情推理到演绎推理的过程。

在实际教学中可以引导学生先看图，再让学生分组将图剪开，动手操作发现矛盾（64＝65?）。然后，尝试找出理由并尝试证明，最后表达收获。

可以采用如下反证法证明，在证明过程中加深对相似图形的理解。

如图 25，过 D 作 AC 的垂线交 AC 于点 F。假定图 24-2中的图形是长方形，那么图形的右下角就应当是直角，则在图 25 中有 $\angle 1+\angle 3=90^\circ$。因为 $\angle 2+\angle 3=90^\circ$，所以 $\angle 1=\angle 2$。由相似三角形的判定定理，可知两个直角三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似。由相似三角形对应边成比例，应当有：$\frac{EF}{BC}=\frac{DF}{AC}$，即 $\frac{2}{3}=\frac{5}{8}$，这是不可能的，因此图 24-2 中的图形不可能是长方形。

由于 $\frac{2}{3}-\frac{5}{8}=\frac{1}{24}$，这个差很小，因此会造成我们视觉的误差，把图 24-2 中的图形判断为长方形。

图 25

教学中可以鼓励学生运用不同的方法对此问题进行解释。

例 75 从年历中想到的。

观察几个年份的年历和月历，思考下面几个问题：

(1)在同一年的月历中，哪些月份的“月历表”的排列是基本一致的？

(2)有一种计算机病毒叫“黑色的星期五”，当计算机的日期是 13 日又是星期五时，这种病毒就发作。已知 2009 年 2 月 13 日是“黑色的星期五”，请找出接下来的 4 个“黑色的星期五”。

(3)对于学有余力的学生，可以探索下面的问题：

许多人都认为，“办喜事”最好是“6 月 6 日星期六”，可是有人说：“这样的日子是千载难逢”，你同意这种说法吗？你能找出几个“6 月 6 日星期六”的具体年份吗？

［说明］ 这是一个通过对日常生活观察、发现某些规律的开放性问题，可以根据学生的学习情况，提出不同层次的问题。每一个问题的设计，都是为了让学生学会观察、思考和质疑，提高学生学习数学的兴趣，体会模型思想。

问题(1)是让学生学会观察、学会提问题。这个问题的

入手点低，每个学生都能参与，都能有所发现，并且可以培养学生“分类讨论”的意识。分平年和闰年：平年时，1月、10月，2月、3月、11月，4月、7月，9月、12月的月历表基本一致；闰年时，1月、4月、7月，2月、8月，3月、11月，9月、12月的月历表基本一致。引导学生在貌似杂乱无章中发现规律，利用规律感悟周期现象。

问题(2)中接下来的4个“黑色的星期五”是：2009年3月13日、2009年11月13日、2010年8月13日、2011年5月13日。解决问题的方式较多，可以利用对问题(1)发现的规律来思考。也可以充分利用信息工具，如从网上找一个“万年历”的小软件用于观察发现。

问题(3)中最近的几个“6月6日星期六”的日子有1992年、1998年、2009年、2015年、2020年，因此“千载难逢”的说法不对。更加理性的思考是：闰年的周期大体上是“4”，星期的周期是“7”，所以年历的变化周期“大体上”不会超过4×7＝28。一旦找到了一个“6月6日星期六”的日子，如1992年，“大体上”可以猜测1992＋28＝2020(年)的6月6日也是星期六。也可以让学生思考：为什么是“大体上”？例外发生的条件是什么？

例76　包装盒中的数学。

(1)让学生分组收集一些商品的空包装纸盒，请大家分别计算出它们的体积和表面积。

(2)请学生将这些盒子拆开，看一看它们是怎样裁剪和粘接出来的。

(3)给一个矩形纸板(如A4纸大小)，让学生根据上面的发现，裁剪、折叠出一个无盖长方体的盒子，并计算出

它的体积。

(4)同组同学之间比较结果，分析谁的盒子体积比较大，分析怎样能制作一个体积更大(最大)的盒子(只是实验、比较，不要求证明)。

(5)结合一种具体的待包装物体(如5本书或2个茶杯)设计一个包装盒，使这个盒子恰能包容它们，如有可能实际做出这个盒子。

[说明] 这是一个过程比较长的活动，可以引导学生体验一个比较完整的问题解决过程。让学生收集包装盒、拆开观察是一个很有益的过程，能很好地启发学生如何寻求解决后面问题的思路。问题(5)是一个实际应用，它的结果不唯一，可以交流展示学生的成果，请学生说明制作过程中的关键数据是如何得到的，裁剪方案是如何形成的。

例77 看图说故事。

如图26，设计两个不同问题情境，使情境中出现的一对变量满足图示的函数关系。结合图象，讲出这对变量的变化过程的实际意义。

图26

[说明] 通过这个活动，激发学生自己思考并构造出满足特定关系的函数实例，以加深对函数的理解。

学生可以设计多种情境。比如，把这个图看成“小王骑车的 s-t 图”，可以说出下面的故事：小王以 400 米/分的速度匀速骑了 5 分，在原地休息了 6 分，然后以 500 米/分的速度匀速骑回出发地。

再比如，有一个容积为 2 升的开口空瓶子，小王以 0.4 升/秒的速度匀速向这个瓶子注水，注 5 秒后停止，等 6 秒后，再以 0.5 升/秒的速度匀速倒空瓶中的水。

教师可以鼓励学生，创设不同的符合函数关系和实际情况的情境。

例 78 利用树叶的特征对树木分类。

(1)收集三种不同树的树叶，每种树叶的数量相同，比如，每种树选 10 片树叶。

(2)分类测量每种树叶的长和宽，列表记录所得到的数据。

(3)分别计算出树叶的长宽比，估计每种树树叶的长宽比。

(4)验证估计的结果。

[说明] 我们可以抓住树的某些特征对树进行分类，本例是利用树叶的数据特征来对树进行分类。

本活动适用本学段的各个年级，要求可以不同。学生先通过数据收集和分析知道一些树的树叶的长与宽的比；对于新采集到的树叶，通过长与宽的比来判断这个树叶是属于哪种树。这一学习活动有利于培养学生的数据分析意识，体会有许多事情通过数据分析可以抓住本质。知道数据不仅仅是别人提供的，还可以自己收集；对于同一种树，树叶长与宽的比也可能是不一样的，进一步感受数据的随机性；体会只要有足够的数据，就能够分析出一些规律性的结论。

教学中可以作如下设计：

(1)建议采用小组活动的形式，学生通过合作交流可以获得较多的数据和信息。

(2)为了使分析的结果更加明显，最好选择树叶区别较大的三种(或者更多)树、而每种树选择的树叶的大小要接近，即区别要小一些。

(3)“估计每种树树叶的长宽比”的方法可以是多样的，比如，对于每种树的10片树叶都测量了长和宽以后，可以用10个比值的众数，也可以用10个比值的中位数，还可以把长和宽各自相加后，取和的比值。针对这个问题，用后一种方法比较合适。

(4)取一片新的树叶，通过这片树叶的长宽之比、参照(3)的估计结果，来判断这片树叶属于哪种树。学生会发现，即使是同一棵树，树叶长与宽的比值恰好等于估计值的可能性也很小，这体现了数据的随机性。可以进一步启发学生考虑一个合理的方案：只要比值大概等于估计值，就可以认为是同一种树，也就是说，需要构造一个以估计值为中心的数值区间，当新取的树叶的长宽比值属于这个区间时就认为属于这个树种。如何合理地构造这个数值区间是重要的，区间太短则可能拒绝同类树种，区间太长则判断的精度就要差。可以考虑下面的方法：当估计值是平均数时，区间为平均数$\pm\sigma$，或者平均数$\pm 2\sigma$，其中σ是样本标准差。让学生感悟决定数值区间的道理(可以告诉学生，进一步的学习，将会从理论上计算区间的长度)。

这个问题可以举一反三。

例 79 利用几何图形研究代数问题。

对于给定的两个数 x 和 y，求使得 $(x-b)^2+(y-b)^2$ 达到最小的 b，也就是说要找到一个 b_0，使得对任意的 b 有

$$(x-b_0)^2+(y-b_0)^2\leqslant(x-b)^2+(y-b)^2。$$

[说明] 利用直角坐标系，不仅能够推导出几何图形的代数表达式，还能够利用几何图形来研究代数问题，这是帮助学生建立几何直观的有效途径。

可以把给定的两个数看做数对，对应于二维平面的点（如图 27），用 $A(x, y)$ 表示。对于任意数 b 也可以看做数对 (b, b)，用点 $B(b, b)$ 表示。

图 27

回忆关于直线的学习，由图 27 可以看到，点 $B(b, b)$ 位于通过第一象限、与横坐标倾斜 45°角的直线上。我们的问题用几何语言可以表述为：在这条直线上寻找一点，使得这一点到给定点 $A(x, y)$ 的距离最短。显然，这一点应当是点 $A(x, y)$ 到直线的垂足，设其为 $B'(b_0, b_0)$。因为

$$\begin{aligned}(x-b)^2+(y-b)^2&=(x-b_0+b_0-b)^2+(y-b_0+b_0-b)^2\\&=[(x-b_0)^2+(y-b_0)^2]+2[(x-b_0)+\\&\quad(y-b_0)](b_0-b)+2(b_0-b)^2。\end{aligned}$$

由图 27，我们可以把上式左边看做线段 AB 长的平方，

上式右边第一个中括号中的两项之和看做线段 AB' 长的平方，最后一项看做线段 BB' 长的平方。因为 B' 是 A 到直线的垂足，由勾股定理，上式右边第二项应当为 0，即 $(x-b_0)+(y-b_0)=0$，可以得到 $b_0=\frac{1}{2}(x+y)$。

从上面的计算结果可以看到，b_0 正是 x 和 y 的算术平均数。上面的证明方法和结果可以推广到 n 个数据，即对于给定的 n 个数 x_1，…，x_n，使得

$$(x_1-b)^2+\cdots+(x_n-b)^2$$

达到最小的 b 为 $\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$，这是 n 个数据的平均数。在"统计与概率"中，通常称上式为离差平方和。如果把 n 个数据看做样本，那么样本平均使样本的离差平方和达到最小，因此在"统计与概率"中经常会用到样本平均。

实施建议

例 80 "零指数"的教学设计(第三学段)。

本实例希望体现课程目标在课堂教学中的整体落实——通过本节课的学习，学生不仅理解和掌握有关的知识技能，而且初步了解指数概念是如何扩充的，感受零指数"规定"的合理性。

通过计算 $2^3\div2^3$ 提出问题：如果应用同底数幂的运算性质，可以得到 $2^3\div2^3=2^{3-3}=2^0$。那么 2^0 有什么意义呢？等于多少呢？我们需要做出解释，数学面临了挑战。

我们先回顾简单的事实：$2^3\div2^3=8\div8=1$，于是可以自然提出猜想：$2^0=1$，然后采用各种途径引导学生感受规

定“$2^0=1$”的合理性。例如：

用细胞分裂作为情境，提出问题：一个细胞分裂1次变2个，分裂2次变4个，分裂3次变8个……那么，一个细胞没有分裂时呢？

观察数轴上表示2的正整数次幂16，8，4，2等点的位置变化，可以发现什么规律？

图28

再观察下列式子中指数、幂的变化，可以发现下面的规律：

$2^4=16$，

$2^3=8$，

$2^2=4$，

$2^1=2$，

$2^{(\ )}=1$。

这样，在学生感受“$2^0=1$”的合理性的基础上，做出零指数幂意义的“规定”，即 $a^0=1(a\neq0)$。

在规定的基础上，再次验证这个规定与原有“幂的运算性质”是无矛盾的，原有的幂的运算性质可以扩展到零指数。例如，计算 $a^5\div a^0$：

运用幂的运算性质　$a^5\div a^0=a^{5-0}=a^5$；

根据零指数幂意义的规定　$a^5\div a^0=a^5\div1=a^5$。

综上，学生在学习“零指数”时将经历如下的过程：面对挑战进行思考—提出“规定”的猜想—通过各种途径说明“规定”的合理性—做出“规定”—验证这种“规定”与原有知

识体系无矛盾—指数概念和性质得到扩展。

这样的过程较充分地体现了数学自身发展的轨迹，有助于学生感悟指数概念是如何扩展的。他们借助学习“零指数”所获得的经验，可以进一步尝试对负整数指数幂的意义做出合理的“规定”。这样的过程较充分地展示了“规定”的合理性，有助于发展学生的理性思维。

例 61 百分数的认识(第二学段)。

上课开始，教师与学生共同展示自己收集的生活中的“百分数”例子，比如，在饮料的包装盒上、在衣服的标签上、在报纸上、在玩具的说明书上，学生们发现了很多的百分数。教师要引发学生对这些新认识的数的兴趣，并鼓励学生对百分数提出问题。比如：

(1)人们为什么要用百分数?

(2)百分数与分数有什么区别?

(3)百分数是什么意思?

(4)百分号是怎么写的?

(5)百分数是干什么的?

在此基础上，教师可以与学生一起把问题归纳为：

(1)为什么要用百分数?

(2)在什么情况下用百分数?

(3)百分数是什么意思?

(4)百分数与分数有什么联系?

在对问题进行归纳后，可以让学生分小组尝试回答这些问题，然后教师和学生共同提炼出本节课所要学习的知识。在这些基础上，教师可以进一步引导学生考虑，还可以创造什么数？如果学生的思维活跃，可能会提到十分数、

千分数等。这个过程，不仅促使学生对知识的理解更加深刻，而且也能鼓励学生思维的创新。

例 82　开放式问题及其评价。

活动问题：晚会奖品。

问题：在一次晚会上，6 份相同的奖品被藏了起来。请两位同学李明和王佳一起去找这些奖品，直到 6 份奖品全部被找到。两位同学找到奖品的数量可能是多少？

把两位同学找到奖品的数量列在下表中。（表中已经列举了一种可能的情况）

李明找到的奖品数	0						
王佳找到的奖品数	6						

请你解释为什么王佳不可能恰好比李明多找到 1 份奖品。

解决方案：

两位同学找到奖品的数量有下面 7 种可能的情况：

李明找到的奖品数	0	1	2	3	4	5	6
王佳找到的奖品数	6	5	4	3	2	1	0

只有当奖品总数是奇数的时候，两个人所找到的奖品数一个是奇数，一个是偶数，这时王佳才可能比李明多找到 1 份奖品。由于 6 是偶数，它是两个奇数或两个偶数的和，因此，王佳不可能恰好比李明多找到 1 份奖品。

评分指南：

	一级水平	二级水平	三级水平	四级水平
数学准确性和方法	没有指出李明和王佳找到奖品的所有可能情况。	指出了李明和王佳找到奖品的所有可能情况，但没有系统的方法。	指出了李明和王佳找到奖品的所有可能情况，运用了比较系统的方法。	指出了李明和王佳找到奖品的所有可能情况，运用了非常系统的方法。
解释的合理性	没有理解问题或者没有认识到王佳不可能比李明多找到1份奖品。	试图回答问题但没有认识到王佳不可能比李明多找到1份奖品。	解释中涉及了一些关于奇数和偶数的内容，但不清楚。	解释充分说明了为什么王佳不可能比李明多找到1份奖品。

下面是一个学生的答案，被评为水平三：

李明找到奖品的数量	王佳找到奖品的数量
0	6
3	3
5	1
1	5
6	0
4	2
2	4

解释为什么王佳找到的奖品数不可能恰好比李明多1份？

王佳不可能恰好比李明多找到1份，因为6是个偶数，它有许多分解的方法。

这个回答运用列举的方式找出了所有可能的组合。学生正确地指出王佳不可能恰好比李明多找到1份奖品，并且认识到了这和奇数、偶数有关。但是，原因说明得不够清楚，也许他还没有完全理解。所以评为水平三。